

Sraffa and Leontief revisités

Méthodes mathématiques et modèles de l'économie circulaire

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable, Hassan A. Nour Eldin, Helmut Knolle

Cet ouvrage est paru en langue anglaise en tant que monographie chez l'éditeur scientifique De Gruyter-Oldenbourg, en janvier 2020.



Jean-François
Emmenegger



Daniel Chable



Hassan A. Nour Eldin



Helmut Knolle

Les auteurs

Prof. Dr. sc. tec. Hassan Ahmed Nour Eldin, chaire de contrôle automatique et de cybernétique technique à l'Université de Wuppertal, Allemagne, émérite, Dübendorf, Suisse, né en 1935,

Dr. math. Jean-François Emmenegger, lecteur en mathématique et statistique économique au département des méthodes quantitatives de l'Université de Fribourg, Suisse, émérite, Marly, né en 1945,

PD Dr. Helmut Knolle, Maître de Conférence en Colombie, biomathématicien, expert à l'Office fédéral de la santé à Berne, émérite, Wohlen près de Berne, né en 1939,

Daniel L. Chable, dipl. math. ETHZ, Vice-directeur et actuaire en chef, Nestlé S.A, Vevey (1942-2018[†]).

De la circularité dans la nature à la circularité économique

La vie sur terre dépend de processus circulaires. Ceci est valable autant pour les plantes que pour les animaux et les hommes. Par l'élevage bovin et l'agriculture l'homme a appris à connaître les cycles de vie des animaux et des plantes et de les adapter à ses propres besoins, mais cette forme d'économie était toujours encore cyclique, et l'homme n'est pas encore intervenu dans les vastes cycles de l'eau, de l'azote et du carbone. Ceci a changé avec l'ère de la production industrielle et l'exploitation de ressources non renouvelables. Les multiples désavantages de cette forme de production, parmi lesquelles les changements de climat causent les plus grandes inquiétudes, sont devenus dès lors clairement visibles. Une nouvelle prise de conscience suscite actuellement une renaissance de l'intérêt à l'économie circulaire, tenant compte du fait que 'les ressources sont présentes dans une certaine quantité et avec une capacité de renouvellement spécifique', voir Aurez [1] (2019), p. 24. Au dernier siècle il y a eu deux économistes qui ont compris et décrit la circularité de l'économie, Wassily Leontief (1906-1999) und Piero Sraffa (1898-1983).

Wassily Leontief (1906-1999) était un économiste russo-américain. En 1928 il a voué sa thèse de doctorat à l'économie circulaire. Il a développé les 'tableaux entrées sorties', aussi désignés tableaux input output (IOT), qui sont aujourd'hui utilisés et conçus dans les Offices statistiques de tous les pays, afin de représenter la production nationale annuelle. Ces tableaux permettent également de reproduire les résultats de la comptabilité nationale.

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

Piero Sraffa (1898-1983) a expliqué dans son livre [8] (1970) « *Production de marchandises par des marchandises* », les fondements de la compréhension des processus de production circulaires. Il considéra les marchandises comme moyens de production et comme produits finaux. En supposant une marge bénéficiaire et un taux salarial constants, il calcule des prix de production, obtenant un surplus de façon à ce que les entreprises touchent des bénéfices et les ouvriers leurs salaires.

De l'économie agraire des cultures avancées à l'école classique en économie et à l'école néoclassique

Les témoignages qui existent sur les cultures avancées des égyptiens et des civilisations de la Mésopotamie dans la région du croissant fertile illustrent intensivement que les hommes ont observé très tôt les processus naturels. Ils ont saisi la signification du cycle des saisons, le débit de l'eau du Nil, de l'Euphrate et du Tigre, l'influence de la météorologie, et finalement la circularité de la vie des plantes et des animaux. Dans l'édification de leur agriculture ces civilisations avancées ont observé la circularité dans la nature et l'ont imité. Ainsi sont nés les premiers processus économiques circulaires. La confection des outils de base suivit la même logique. Cette mise en place organisationnelle et artisanale a mené à l'apogée de ces civilisations anciennes. En particulier, les Egyptiens ont représenté sur des graphiques muraux l'ordre chronologique des étapes de travail dans la culture des céréales : labourer, semer, récolter, conserver et entreposer ou consommer. Les premiers outils sont également présentés sur ces images murales.

La connaissance de l'économie circulaire fait partie de notre histoire depuis les civilisations avancées de l'antiquité. Elle a été transmise soigneusement depuis des millénaires de génération en génération. Ainsi le rappellent de grands penseurs qui en témoignent. Le médecin et physiocrate François Quesnay (1694-1774) représente graphiquement le concept de la circularité des processus de production dans ses œuvres (1759) sous forme de *tableaux économiques* et les illustrent par des calculs.

On peut identifier deux événements qui marquent l'éloignement de la compréhension de la circularité des processus de production. En *premier*, on a le terme même contradictoire de Adam Smith (1723 - 1790) qui prétend en 1776 que le capitalisme transforme l'égoïsme individuel en l'opposé, c'est-à-dire, égard et service pour les autres, voire Foley ([2], p. 2). Ce mécanisme serait dirigé par *la main invisible*. Si chaque individu maximise son utilité personnelle, alors selon Smith, la richesse des nations est assurée. Cette affirmation n'a jamais été prouvée solidement et rigoureusement ni par Adam Smith ni par ses successeurs [2], p. 3.

La concentration sur la réalisation de l'utilité personnelle nous éloigne de la compréhension holistique des processus économiques, car l'attention se fixe alors sur le produit final, donc sur l'objet qui mène à l'utilité, justifiée psychologiquement et individuellement. Les moyens de production qui sont inéluctablement nécessaires, tel le blé, le fer, le bois, à partir desquels l'économie fabrique aussi des outils, biens et objets représentés sur les images murales des anciennes civilisations égyptiennes, sont repoussés à l'arrière-plan.

L'époque de *l'école classique en économie*, représentée par Adam Smith, David Ricardo et d'autres, reposait encore sur la compréhension de la circularité des processus économiques, ce qui dura jusqu'en 1870. L'un des piliers de cette école est la notion de la *valeur-travail* qui affirme que le prix d'une marchandise dépend essentiellement du temps de travail utilisé pour sa fabrication. Après 1870, et ceci est le *deuxième événement*, le concept de la *valeur-travail* est repoussé par la théorie de l'*utilité marginale*. Celle-ci n'était au début qu'une théorie du comportement du consommateur. Mais à la Belle Epoque plusieurs économistes ont développé l'idée de créer avec la théorie de l'utilité marginale une théorie de la production. Ils ont placé à côté de l'utilité marginale des marchandises les 'facteurs de production', soit le 'travail' et le 'capital'. Cette direction de pensée qui règne depuis 1900 est appelé aujourd'hui *l'école néoclassique*, même si elle n'a pratiquement rien à faire avec *l'école classique*.

Généralement, on voit la différence essentielle entre l'école classique et l'école néoclassique dans la théorie des prix, donc le concept de la *valeur-travail* opposée à la théorie de l'*utilité marginale*. Pour ce qui suit, il y a une autre différence importante. Selon l'école néoclassique les processus de production économiques sont conçus tels une route à sens unique. On débute avec les facteurs de production 'travail' (L) et 'capital' (K) et on obtient un produit Y qui n'est pas décrit en détail, donc « extraire – fabriquer – consommer – jeter », voire Aurez [1] (2019), p. 24. Ceci donne l'équation $Y = f(L, K)$, où f est la 'fonction de production'. L'apparition de sous-produit non désirés, la provenance des forces de travail et du capital, ainsi que la possibilité d'itération du processus de production ne sont pas des questions traitées dans ce contexte, voire Knolle [4]. Aurez [1], p. XIV, parle d'une « économie industrielle linéaire ».

Présentation formelle des processus circulaires de production économique selon Sraffa

On constate qu'une présentation strictement verbale du processus de production circulaire pour un nombre arbitraire de branches, comprenant tous les détails quantitatifs des moyens de production se heurte à des limites d'expressions linguistiques. Plusieurs auteurs se sont déjà cassés les dents à cet exercice. Afin d'illustrer ces limites, nous prenons le premier exemple de Sraffa ([8], paragraphe 1, p. 21) de la production de blé pour deux branches et deux produits.

La présentation suivante s'appuie sur Helmut Knolle [4]. Sraffa commence son œuvre *Production de marchandises par des marchandises* [8] en considérant un modèle d'une économie très simplifiée, dans laquelle dans deux branches l'on ne produit que du blé et du fer. On entend ici par fer la production de simples outils en fer qui sont usés après une année. La productivité est aussi faible qu'aucun surplus n'est généré. Il n'y a pas de profits. Les ouvriers ne sont pas payés en l'argent, mais par un salaire de subsistance sous forme de blé. Dans le cadre de la technologie choisie les quantités de blé et fer, engagées dans les deux branches, sont en proportions fixes les uns par rapport aux autres : chaque ouvrier mineur a besoin d'une pioche, chaque ouvrier agricole a besoin d'une faux, etc. L'activité d'une année est décrite par le schéma suivant : Dans la première branche on produit à partir de 8 tonnes (t) de fer et 120 quintaux (q) de blé la quantité de 20 t de fer et dans la deuxième branche on obtient à partir de 12 t de fer et de 280 q de blé la quantité de 400 q de blé.

Le système utilise donc dans les deux branches $8+12=20$ t de fer et génère la même quantité de fer, respectivement utilise $120+280=400$ q de blé et produit la même quantité de blé. L'industrie du fer produit au-delà de ses propres besoins 12 t de fer qu'elle peut échanger contre 120 q de blé, afin de payer ses ouvriers et ses entrepreneurs en salaire de subsistance. L'agriculture de son côté utilise 12 t de fer qu'elle échange contre 120 q de blé à l'industrie du fer.

Sraffa a développé ainsi avec ce schéma un modèle de prix, car l'équilibre entre la quantité totale des moyens de production et la totalité de la production est réalisée par la formation de prix de production (valeurs d'échange). Il faut que la tonne de fer coûte autant que 10 q de blé, afin que le système puisse se reproduire d'année en année. Dans cette économie la devise utilisée est le *blé*. Les ouvriers et entrepreneurs obtiennent leur salaire de subsistance en quantité de *blé*.

Pour la branche du blé la valeur totale entre les moyens de production équivaut à la valeur totale de la production de blé, soit : $12 \times 10 + 280 \times 1 = 400 \times 1 = 400$ q de blé, pour l'industrie du fer la valeur totale produite est de $8 \times 10 + 120 \times 1 = 20 \times 10 = 200$ q de blé. *L'ensemble de la production vaut donc à 600 q de blé*. On peut formuler cette équivalence aussi d'une autre façon : La branche du blé doit céder à la fin de l'année une quantité de 120 q de blé de sa propre production contre 12 t de fer de l'industrie du fer. L'industrie du fer a besoin de 120 q de blé afin de pouvoir céder 12 t de fer.

La branche du blé a besoin de 280 q de blé, en partie comme semence et en partie pour fournir aux ouvriers et aux entrepreneurs la subsistance nécessaire. Il a aussi besoin de 8 t de fer sous forme d'outil pour réaliser la production annuelle suivante. L'industrie du fer a besoin de 120 q de blé pour fournir le salaire de subsistance aux ouvriers et aux entrepreneurs. Le restant des 8 t de fer est utilisé sous

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

forme d'outil pour la production du fer. Le système est en équilibre, si les dépenses et les revenus sont égaux, ce qui est réalisé si 10 q de blé valent 1 t de fer.

Voici donc une description verbale de l'exemple le plus élémentaire de Sraffa. Il n'y a pas encore de surplus de production, ni de profit pour les entrepreneurs, ni de salaire pour les ouvriers, uniquement un salaire de subsistance sous forme de blé pour toutes les personnes actives. La complexité de la présentation verbale des processus circulaires est ainsi visible. Voici donc une des raisons pour laquelle le concept de la production circulaire n'est pas familier à un grand public. Aux économistes qui se servent exclusivement de la description verbale et non de l'algèbre matricielle, l'accessibilité est vraisemblablement aussi rendue difficile.

Par contre, avec les moyens de l'algèbre matricielle, la description et la compréhension de l'économie circulaire devient facile.

Dans le prochain paragraphe nous montrons ce que le livre **Sraffa and Leontief revisited** procure.

De l'exemple le plus élémentaire de Sraffa à la SWISS-IOT 2014 (49 secteurs/groupes de produits)

Représentation rigoureuse de l'économie circulaire de Sraffa par l'algèbre matricielle

L'œuvre de Piero Sraffa « *Production de marchandises par des marchandises* » [8], version anglaise (1960), a suscité un vif intérêt parmi de célèbres économistes (Pasinetti, Schefold) et de mathématiciens (Newman). Depuis, un grand travail a été accompli pour compléter les mathématiques du livre de Sraffa. Ainsi Peter Newman et Ann Arbor [6] ont évoqué explicitement dans leur article que le théorème de Perron-Frobenius représente la base algébrique du modèle des prix de production de Sraffa. Il s'agit du modèle comprenant un surplus transformé en profit, tandis que les salariés touchent un salaire de subsistance. Newman a donc correctement ramené le calcul des prix exclusivement positifs au calcul de la solution d'un problème de valeurs propres. Ensuite, ces auteurs ont aussi donné la solution du modèle général des prix de Sraffa comprenant profits et salaires rémunérés. Ils ont formulé les conditions d'existence des matrices inverses qui surgissent, en se référant aux théorèmes de Felix R. Gantmacher [3] et autres, obtenant ici également les solutions exclusivement positives pour les prix.

Bertram Schefold a reformulé et complété sous forme mathématique, dans une annexe de l'édition allemande de l'œuvre de Sraffa [8], éditeur Suhrkamp (1976), les thèses de base de Sraffa.

Notre intention est de compléter la littérature existante (Pasinetti, Schefold, Kurz et Salvadori) en présentant des exemples calculés et des applications sur des données réelles, essentiellement des 'tables entrées sorties' (IOT). Il s'agit d'utiliser systématiquement l'algèbre matricielle et de se référer aux théorèmes de cette discipline. Pour les calculs des exemples et des applications avec les 'tables entrées sorties' de l'Allemagne, la Suisse et d'autres pays, les logiciels MATHEMATICA et MATLAB sont utilisés de pair avec leurs facilités de calcul et de représentation graphiques. Ainsi, il y a une ligne qui se tire des modèles circulaires de Sraffa à leur description formelle par notation matricielle, la relation aux théorèmes, les calculs à l'aide des logiciels modernes et l'interprétation des résultats numériques obtenus.

Notre expérience montre que sans l'utilisation rigoureuse de l'algèbre matricielle, il est impossible de décrire complètement l'économie circulaire en tant que système fermé dans une dimension arbitrairement choisie. Cet état des faits est clairement illustré par la description verbale de l'exemple le plus élémentaire de Sraffa, présentée ci-dessus. Il est essentiel d'indiquer le domaine des mathématiques qui est à la base de ces calculs. Il s'agit du groupe des théorèmes de Perron-Frobenius. Dans notre livre nous avons soigneusement complété l'éventail des Lemmes et Théorèmes appartenant à cet ensemble de propositions, en ajoutant leurs démonstrations, si cela nous semblait utile. Nous avons été inspirés par l'œuvre de référence de Gantmacher [3].

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

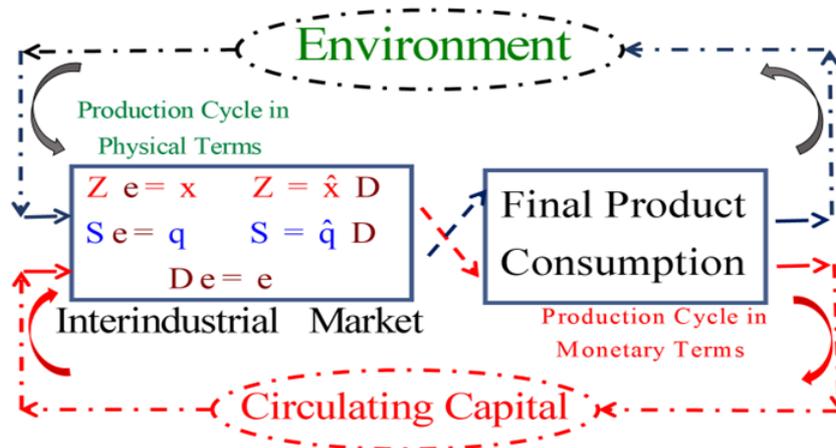
11'237	1	1-3	Agriculture, forestry and fishing
7'149	2	3-5	Mining and quarrying
18'191	3	9-10	Manufacture of food and tobacco products
3'965	4	13 - 15	Manufacture of textiles and apparel
9'604	5	16	Manufacture of wood and of products of wood and cork, except furniture
4'091	6	17	Manufacture of paper and paper products
3'599	7	18	Printing and reproduction of recorded media
23'046	8	19 - 20	Manufacture of coke, chemicals and chemical products
44'786	9	21	Manufacture of basic pharmaceutical products and Pharmaceutical preparations
7'494	10	22	Manufacture of rubber and plastic products
8'322	11	23	Manufacture of other non-metallic mineral products
11'527	12	24	Manufacture of basic metals
18'047	13	25	Manufacture of fabricated metal products, except machinery And equipment
33'175	14	26	Manufacture of computer, electronic and optical products
12'286	15	27	Manufacture of electrical equipment
7'728	16	28	Manufacture of machinery and equipment n.e.c.
1'895	17	29	Manufacture of motor vehicles, trailers and semi-trailers
2'030	18	30	Manufacture of other transport equipment
650	19	31	Manufacture of furniture
2'042	20	32	Other manufacturing
4'144	21	33	Repair and installation of machinery and equipment
32'470	22	35	Electricity, gas, steam and air-conditioning supply
4'891	23	36 - 39	Water supply, waste management
23'831	24	41 - 43	Construction
5'829	25	45	Wholesale and retail trade and repair of motor vehicles and motorcycles
64'563	26	46	Wholesale trade, except of motor vehicles and motorcycles
3'829	27	47	Retail trade, except of motor vehicles and motorcycles
38'045	28	49 - 51	Land, water and air transport and transport via pipelines
21'767	29	52	Warehousing and support activities for transportation
4'687	30	53	Postal and Courier Aktivitas
1'318	31	55	Accommodation
1'996	32	56	Food and beverage service activities
7'040	33	58 - 60	Publishing, audiovisual and broadcasting activities
8'845	34	61	Telecommunications
13'488	35	62 - 63	IT and other information services
34'117	36	64	Financial service activities
8'652	37	65	Insurance
10'162	38	68	Real estate activities
64'390	39	69 - 71	Legal, accounting, management, architecture, engineering activities
1'567	40	72	Scientific Research and Developern
7'232	41	73 - 75	Other professional, scientific and technical activities
34'633	42	77 - 82	Administrative and support service activities
4'988	43	84	Public administration
6'945	44	85	Education
1'138	45	86	Human health activities
2'664	46	87 - 88	Residential care and social work activities
4'836	47	90 - 93	Arts, entertainment and recreation
3'511	48	94 - 96	Other service activities
0	49	97 - 98	Activities of households as employers of domestic personnel / Undifferentiated goods- and services-producing activities of private households for own use
652'440			TOTAL

Désignation des secteurs de la 'table suisse entrée sortie' SWISS-IOT 2014

Le concept suivant de modèles a été introduit pour souligner l'applicabilité aux marchés libres. Chaque marchandise, par exemple le blé ou le fer, est caractérisé par **quatre attributs** dans une économie libre : la *quantité*, le *prix*, la *valeur* et l'*objet*. On comprend la notion *objet* au sens que dans une économie libre, il y a pour chaque genre de produit plusieurs réalisations concrètes. Ainsi, l'acquéreur a la liberté du choix, *exemplaire de sorte / produit / branche*. Ceci vaut typiquement pour l'achat d'une bicyclette. A la fin, l'acquéreur se décide pour un type de bicyclette d'une marque spécifique. A chaque achat libre d'une marchandise, il y a donc 4 degrés de liberté : le choix de l'objet *e*, le prix *p*, la quantité *q* et la valeur *x*. Ce concept de base nous mène à revoir la représentation algébrique.

Ce concept de quatre attributs a été appliqué aux tables entrées sorties (IOT) symétriques de différents pays, qui sont composées de secteurs (branches CPA homogènes) produisant des groupes de produit CPA. Chez Sraffa les branches correspondent alors à ces secteurs, tandis que les produits correspondent aux groupes de produits CPA. La signification CPA veut dire : Statistical Classification of Products by Activity in the European Economic Community.

Jusqu'à présent, on avait en général deux niveaux de matrices, celle du flux des marchandises et celle des coefficients. Cette structure doit être élargie à 4 niveaux (4 matrices entrée sortie **Z, T, S, D**, 4 matrices d'états **A, B, C, D**, 4 vecteurs d'activité de marché **x, p, q, e**). Cette complétude mathématique et ce parachèvement sont traités dans notre livre et représentés graphiquement comme suit.

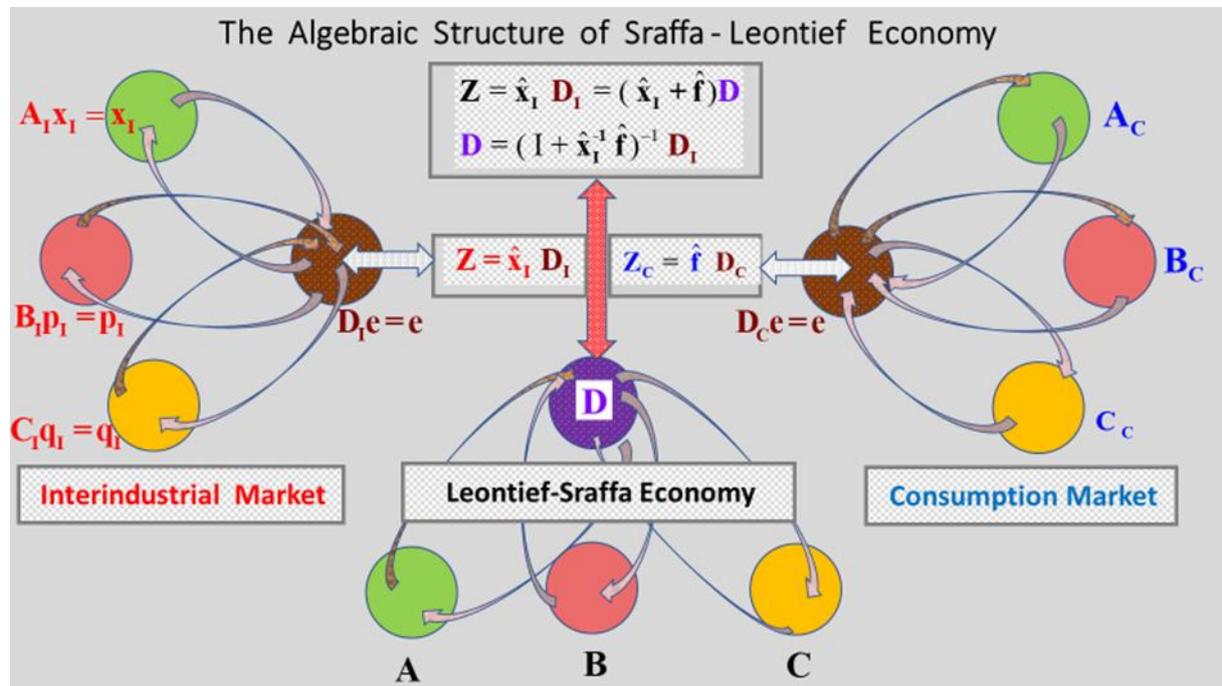


La *production de marchandises par des marchandises* de Sraffa, par processus circulaires en termes physiques ou monétaires : Les sommes des lignes des matrices **Z** et **S** ainsi que la matrice de production stochastique **D** du marché interindustriel déterminent **q** and **x**. Les composantes du vecteur **x** représentent les valeurs de la production interindustrielle, tandis que les composantes du vecteur **q** déterminent la quantité totale des groupes de produits. Les éléments de la matrice de technologie **D** représentent l'influence de chaque secteur sur la technologie des autres secteurs.

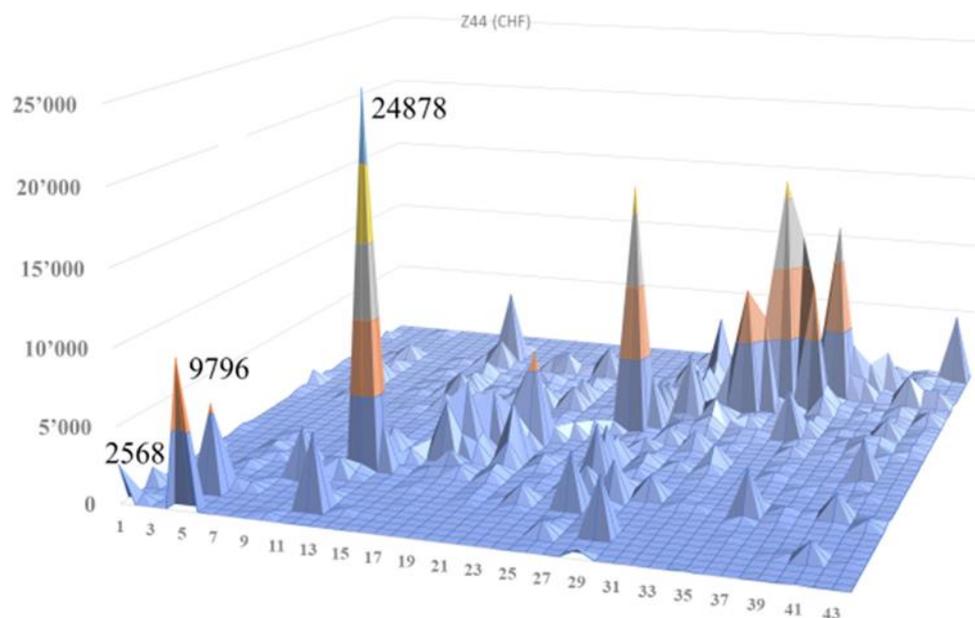
The Stochastic Similarity Table of Interindustrial Production					
		Row-sum	PF-Eigenvector	Stochastic similarity	I/O matrices
Value	x	$Z e = x$	$A x = x$	$A = \hat{x} D \hat{x}^{-1}$	$Z = \hat{x} D$
quantity	q	$S e = q$	$C q = q$	$B = \hat{p} D \hat{p}^{-1}$	$T = \hat{p} D$
price	p	$T e = p$	$B p = p$	$C = \hat{q} D \hat{q}^{-1}$	$S = \hat{q} D$
Object	e	$D e = e$	$D e = e$	$D = \hat{e} D \hat{e}^{-1}$	$D = \hat{e} D$

Relations entre matrices et vecteurs dans le marché interindustriel : Les éléments de la matrice des flux de marchandises **Z** sont les parties additives des composantes du vecteur des valeurs **x**, tandis que

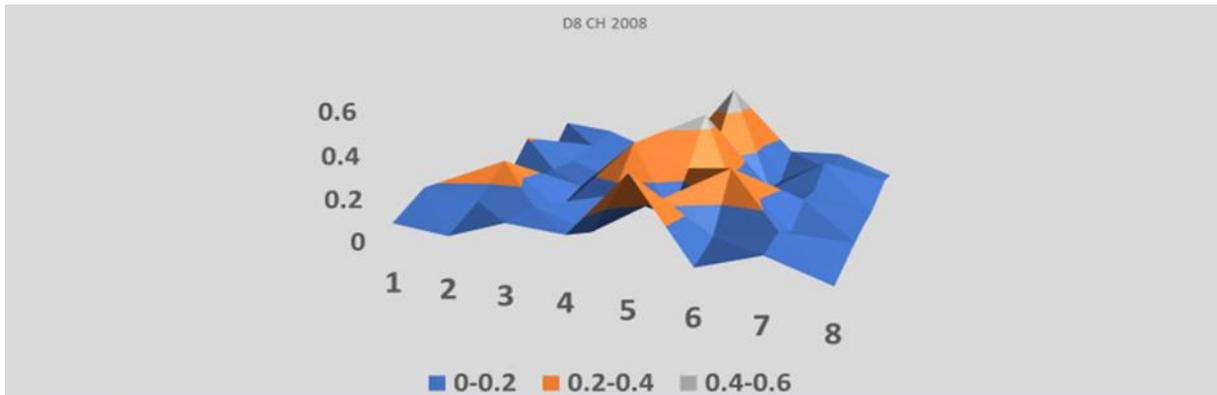
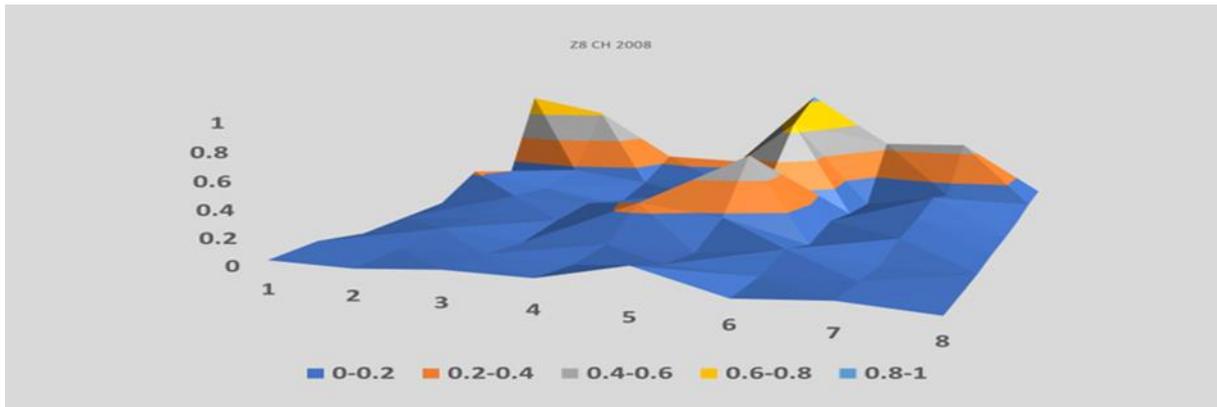
les éléments de la matrice T sont les parties additives des composantes du vecteur des prix p . En analogie ceci vaut aussi pour les éléments de la matrice S , qui représentent la dépendance du vecteur q de l'ensemble des quantités produites par rapport à la production des autres secteurs. Les vecteurs positifs x , p , q ainsi que celui des objets technologiques e sont les vecteurs propres de **Perron-Frobenius (PF-eigenvector dans la table)** des matrices d'états correspondantes A , B , C et D .



Représentation graphique des modèles algébriques de l'économie Sraffa-Leontief et leur relation au marché interindustriel et au marché de la consommation : Les matrices d'états A , B , C et D du marché sont représentées ensemble avec les vecteurs propres de Perron-Frobenius, les valeurs x , les prix p , les quantités q et les objets technologiques e .



Représentation graphique de la 'matrice entrée sortie' Z (44 secteurs / chaque secteur produit un seul groupe de produits CTA et il y a un seul prix par groupe de produit) de la production Suisse 2008 (510.79 milliards CHF).



0.08579054	0.05404462	0.14273563	0.11888518	0.41310235	0.03780734	0.12119121	0.02644311
0.1853483	0.14401581	0.14715457	0.04949163	0.21003866	0.09016263	0.14065689	0.0331315
0.00213577	0.27759712	0.05576718	0.1548689	0.0814699	0.33061815	0.05878867	0.03875431
0.02570365	0.07891532	0.10866624	0.35184796	0.24685924	0.0099385	0.13886491	0.03920419
0.02922004	0.11135184	0.09226702	0.0993736	0.46220687	0.06595459	0.1137422	0.02588384
0.21143186	0.09999559	0	0.1172798	0.30051268	0.03127852	0.19639294	0.04310861
0.01995973	0.13284852	0.06966223	0.10939912	0.50914992	0.00733287	0.09160123	0.06004637
0.2008815	0.16885424	0.06663077	0.0623989	0.22762451	0.12199166	0.12654652	0.0250719

Value: CH 2008 $x = A x = Z e$

						Z 6							x6
0.4926	0.0792	0.2400	0.2015	0.0198	0.0440								1.0774
0.0334	0.9805	0.0020	0.0370	0.0186	0.0182								1.0900
0.0752	0.0469	0.6401	0.0923	0.0165	0.0337								0.9051
0.0303	0.0723	0.0023	0.1822	0.0007	0.0285								0.3167
0.0155	0.0445	0.0078	0.0246	0.6656	0.0141								0.7723
0.0042	0.0586	0.0002	0.0179	0.0027	0.0844								0.1683

						A 6							x6
0.4572	0.0727	0.2652	0.6364	0.0257	0.2614								1.0774
0.0310	0.8995	0.0022	0.1170	0.0241	0.1083								1.0900
0.0698	0.0431	0.7072	0.2916	0.0214	0.2006								0.9051
0.0282	0.0664	0.0026	0.5753	0.0010	0.1694								0.3167
0.0144	0.0409	0.0086	0.0776	0.8618	0.0838								0.7723
0.0039	0.0538	0.0002	0.0566	0.0035	0.5019								0.1683

Object: D e = e

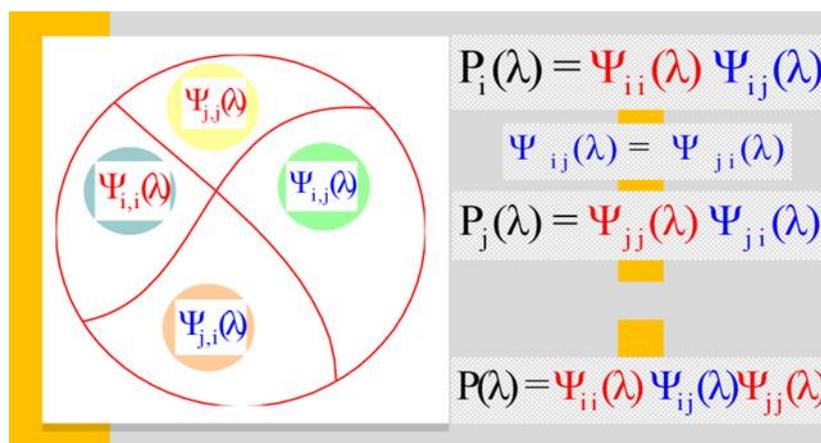
						D6							e
0.4573	0.0736	0.2228	0.1871	0.0185	0.0408								1
0.0307	0.8996	0.0019	0.034	0.0171	0.0167								1
0.0832	0.0519	0.7072	0.102	0.0183	0.0373								1
0.096	0.2286	0.0075	0.5754	0.0025	0.0901								1
0.0202	0.0577	0.0101	0.0319	0.8618	0.0183								1
0.025	0.3485	0.0016	0.1066	0.0164	0.5019								1

Haut : Représentation graphique de la matrice entrée sortie (matrice des flux de marchandises) **Z8** et **D8** – sous forme de tableau – les 8 plus grands secteurs de la ‘table entrée sortie’ suisse, la SWISS-IOT 2008, normé par la *valeur propre de Perron-Frobenius* (PF) de la matrice des flux de marchandises de la SWISS IOT 2008. En bas : Les matrices **Z6**, **A6**, **D6** des six plus grands secteurs. Le vecteur **x6** est le *vecteur propre de Perron-Frobenius* de la matrice d’états **A6**. Il est simultanément la somme des lignes de la matrice **Z6**. La matrice **D6** est une matrice droite stochastique. Son vecteur propre est le vecteur des objets (technologiques) **e**. Les éléments de la matrice technologique **D6** indiquent comment la technologie d’un secteur participe à la technologie des autres 5 secteurs.

Les branches fondamentales de Sraffa, respectivement les produits fondamentaux

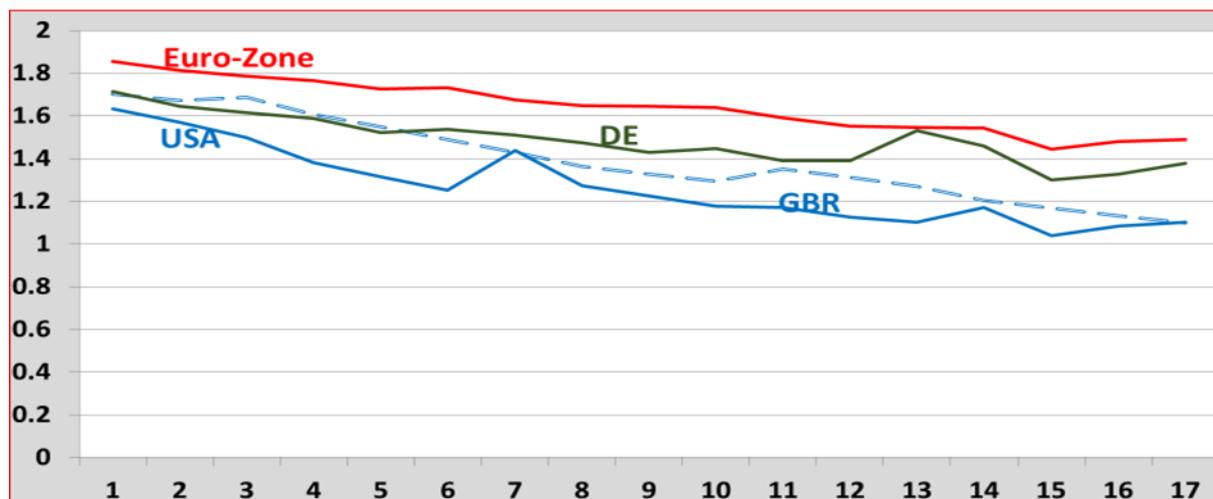
Sraffa [8] discerna dans une économie circulaire comprenant n branches et n marchandises, le cas de *branches à produit unique*, ou chaque branche ne produit qu'une seule marchandise et le cas de *branches à produits multiples (produits joints)*, ou chaque branche produit une à plusieurs marchandises. Dans les deux cas, il y a la notion des *branches fondamentales, respectivement des produits fondamentaux* qui sont essentiels pour une économie, comme la branche de l'agriculture produisant du blé, du bois et des légumes, assurant l'existence de tout le système. A l'opposé, il y a les branches non fondamentales, respectivement les produits non fondamentaux qui produisent des *produits de luxe* non indispensables, tels qui – vu historiquement – les bijoux ou les chevaux de course. Une question importante est la détermination du nombre m de branches non fondamentales parmi les n secteurs, qui mènent au nombre $n-m$ de branches fondamentales. Sraffa ([8], paragraphe 6, 60) dans le cas de *branches à produits uniques* et de *branches à produit multiples* donne des méthodes pour déterminer le nombre m . Schefold [7] a formulé la méthode de Sraffa dans le cas de *produits joints* en termes d'algèbre matricielle.

Dans notre livre, nous avons repris la méthode matricielle de Schefold et nous lui avons donné la forme d'un critère de rang de matrice qui permet de déterminer le nombre m . Nous présentons aussi d'autres méthodes, comme celle du calcul de la matrice proposée par Pasinetti et les illustrons par de multiples exemples numériques. L'origine de la méthode matricielle de Sraffa est identifiée, elle remonte à Lev Semionovitch Pontriaguine (1908-1988). Il s'agit d'un concept hautement mathématique que nous représentons par la figure et les explications suivantes.



Représentation graphique des branches fondamentales (La notion de branche de Sraffa est remplacée par la notion de secteur, si l'application concerne les tables entrées sorties (IOT)) : La branche i génère les vecteurs correspondants \mathbf{x}_i , \mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i , \mathbf{e}_i d'un espace d'influence cyclique qui est représenté par son polynôme caractéristique $P_i(\lambda)$. En analogie, cela vaut pour la branche j avec le polynôme caractéristique $P_j(\lambda)$. Quand deux branches influent d'autres branches, alors la dimension de toutes les branches est influencée – inclus leur propre espace d'influence – et elle est donnée par le produit $P(\lambda)$ des trois polynôme. Pour cette raison, les deux polynômes liés à chacune des branches ne sont pas premiers entre eux. Le **polynôme bleu $\Psi_{ij}(\lambda)$ ou $\Psi_{ji}(\lambda)$ représente** l'espace qui est influencé par les deux branches. Si la dimension de $P(\lambda)$ est égale à n , alors les deux branches sont fondamentales. L'origine de ces conditions remonte à L. S. Pontriaguine. Il existe déjà des algorithmes efficaces pour déterminer non seulement l'espace d'influence, mais aussi les matrices d'état \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} . Ensuite, il est possible d'examiner les **influences** réciproques de combinaisons convexes de vecteurs d'influence arbitrairement choisies.

USA, GBR, DE, Euro-Zone 1995-2011 K*



Le capital circulaire K^* (normé par la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice des flux de marchandise des 'tables entrée sortie' (IOT)) des pays USA, GBR, DE, Zone Euro sur une période de 17 ans (1995-2011).

Avec le livre **Sraffa and Leontief revisited** nous voulons fermer la brèche décrite plus haut.

Le livre contient plusieurs résultats intéressants dont nous présentons quelques-uns.

a) Hassan A. Nour Eldin a réalisé une analyse complète des propriétés algorithmiques des marchés interindustriels. L'économie interindustrielle apparaît sous l'aspect d'un problème aux limites, où les vecteurs des valeurs x , des prix p , des quantités q et des objets e correspondent aux vecteurs propres de Perron-Frobenius des matrices d'états **A**, **B**, **C** et **D**. Ils sont aussi simultanément les sommes des lignes de la matrice des flux de marchandises **Z**, respectivement des matrices **T**, **S** et **D**. La matrice de technologie **D** est une matrice stochastique droite des matrices d'état **A**, **B** et **C**. Ses composantes influent pour cette raison les autres matrices et vecteurs.

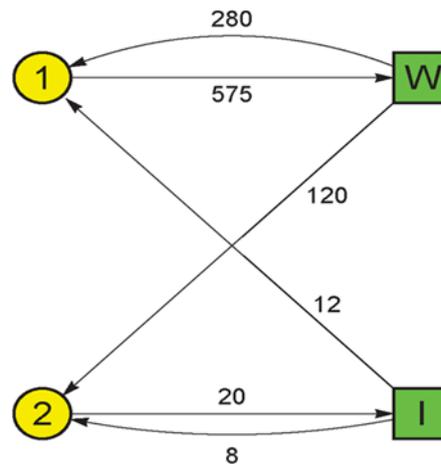
b) Il existe la notion économique importante des branches fondamentales, respectivement des produits fondamentaux, déterminant les branches absolument nécessaires pour le fonctionnement de base de l'économie, comme la branche agricole qui produit du blé, du bois et des légumes et qui garantit que le système continu à tourner. D'autre part, il y a les branches non fondamentales, respectivement les produits non fondamentaux, qui peuvent générer des produits de luxe, non indispensables, tels des bijoux ou des chevaux de courses. Notre livre présente un critère de rang de matrice compréhensible pour déterminer le nombre de produits non fondamentaux. Ainsi on peut déterminer le nombre de branches fondamentales d'un modèle de prix de Sraffa.

c) Le modèle de prix de Sraffa dans lequel le surplus n'est pas subdivisé en profits et salaires permet la définition d'une mesure de productivité R . Si l'on prend la matrice des consommations intermédiaires issue d'une 'table entrées sorties' IOT d'un pays en tant que matrice de base pour la définition d'un modèle de prix de Sraffa, on peut montrer que la mesure de productivité R provenant de la matrice des flux de marchandises, construite à partir de groupes de produits, peut être calculée sans que le vecteur des prix du modèle des prix de Sraffa soit connu. On reconnaît qu'il s'agit encore une fois d'un problème aux limites, connu de la physique. Ainsi on a démontré que le modèle des prix de Sraffa peut être combiné avec une nationale 'table entrées sorties' de Leontief et résulte ainsi en un système dynamique.

d) Le modèle des prix de Sraffa peut aussi être étendu dans le sens d'inclure le recyclage de déchets et ceci en générant malgré tout du profit.

e) Jean-François Emmenegger a montré que le modèle des prix de Sraffa peut être généralisé de façon à ce que chaque secteur possède son propre taux salarial et son propre taux de profit. Ce modèle mène alors à appliquer des distributions de taux de salaire et des distributions de taux de profits réels.

f) Daniel Chable a proposé l'usage extensif des *graphs* et *graphs orientés*, afin de représenter les schémas de production des modèles de prix de Sraffa. Ils sont appelés *réseau de Sraffa*. Nous représentons un tel réseau pour le troisième exemple de Sraffa ([8], paragraphe 5), développé à partir de l'exemple élémentaire présenté plus haut, mais où la production totale est de 575 q de blé. Les cercles représentent les branches alors que les carrés signifient les produits. Nous avons aussi développé des critères pour desceller la présence de produits fondamentaux et non fondamentaux dans les *graphs* et *graphs orientés* qui représentent des schémas de production de Sraffa.



Notre livre fournit une nouvelle perspective à la compréhension de la nature interne de l'économie circulaire. L'algèbre matricielle est l'outil idéal pour représenter l'économie circulaire et représente le flux des marchandises qui tantôt apparaissent comme moyens de production, tantôt comme produits finaux. La matière est illustrée didactiquement par de nombreux exemples et d'applications aux 'tables entrées sorties' (IOT) nationales de Leontief. Les Théorèmes et Lemmes et leurs démonstrations, nécessaires à compréhension des différents modèles de prix de Sraffa, respectivement pour saisir les bases mathématiques, sont présentées de façon complétée.

Bibliographie

- [1] Aurez, Vincent, Georgeault Laurent, *Economie circulaire, Système économique et finitude des ressources*, De Boeck Supérieur s.a., Louvain-la-Neuve, (2016) et (2019)
- [2] Foley, D. K., *Adam's Fallacy, A guide to economic Theology*, The belknap Press of Harvard University Press, 2006.
- [3] Gantmacher, F., R., *Matrizentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [4] Knolle, Helmut, *Die Wachstumsgesellschaft, Aufstieg, Niedergang und Veränderung*, Köln, PapyRossa, (2016).
- [5] Leontief, Wassily Wassiljewitsch, *Die Wirtschaft als Kreislauf*, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, 60, pp. 577--623, Berlin, (1928).
- [6] Newman, P., Arbor A., *Production of Commodities by means of Commodities*, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaftslehre und Statistik, 98. Jg., pp. 58--75, (1962).
- [7] Schefold, Bertram, 'Mr. Sraffa on Joint Production and other Essays', Routledge, (1989).
- [8] Sraffa, Piero, « *Production de marchandises par des marchandises* », première édition française, Dunod, (1970), première édition anglaise, Cambridge University Press, (1960).