

Sraffa and Leontief revisited

Mathematical methods and Models of a Circular Economy

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable, Hassan A. Nour Eldin, Helmut Knolle

Dieses Werk erschien als Monographie im Wissenschaftsverlag De Gruyter Oldenbourg, Januar 2020, in englischer Sprache.



Jean-François
Emmenegger



Daniel Chable



Hassan A. Nour Eldin



Helmut Knolle

Die Autoren

Prof. Dr. sc. techn. Hassan A. Nour Eldin, Lehrstuhl für Automatisierungstechnik und Technische Kybernetik, Universität Wuppertal, Deutschland, emeritiert, Dübendorf, Schweiz, geb. 1934,

Dr. math. Jean-François, Emmenegger, Lektor in Mathematik und Wirtschaftsstatistik am Departement für Quantitative Wirtschaftsforschung, Universität Freiburg, Schweiz, emeritiert, Marly, Schweiz, geb. 1945,

PD Dr. Helmut Knolle, Hochschuldozent in Kolumbien, Biomathematiker, Experte am Bundesamt für Gesundheit in Bern, emeritiert, Wohlen bei Bern, geb. 1939,

Daniel L. Chable, dipl. math. ETHZ, Vizedirektor und Chefversicherungsmathematiker, Nestlé S.A, Vevey (1942-2018[†]).

Von natürlichen Kreisläufen zu Wirtschaftskreisläufen

Das Leben auf der Erde hängt von Kreisläufen ab. Das gilt für Pflanzen, Tiere und Menschen. Zuerst hat der Mensch sich von der Natur ernährt, ohne in diese Kreisläufe einzugreifen. Durch Viehzucht und Ackerbau hat er gelernt, den Lebenszyklus von Tieren und Pflanzen an seine Bedürfnisse anzupassen, aber diese Wirtschaftsform war immer noch zyklisch, und in die umfassenden Kreisläufe des Wassers, des Stickstoffs und des Kohlenstoffs hat der Mensch noch nicht eingegriffen. Das änderte sich erst im Zeitalter der industriellen Produktion und der Ausbeutung von nicht erneuerbaren Ressourcen. Die vielen Nachteile dieser Produktionsweise, unter denen der Klimawandel die grössten Sorgen bereitet, sind jetzt klar sichtbar geworden. Ein neues Bewusstsein weckt gegenwärtig das Interesse an der Kreislaufökonomie, die die Tatsache einbezieht, dass 'die Ressourcen in einer bestimmten Menge vorhanden sind und eine bestimmte Erneuerungskapazität haben', siehe Aurez [1] (2019), p. 24. Im letzten Jahrhundert gab es zwei Ökonomen, die die Wirtschaft als Kreislauf verstanden und beschrieben haben, Wassily Leontief (1906-1999) und Piero Sraffa (1898-1983).

Wassily Leontief (1906-1999) war ein russisch-amerikanischer Wirtschaftswissenschaftler, der 1928 seine Dissertation dem Kreislauf der Wirtschaft widmete. Er hat die Input-Output-Tabellen (IOT) entworfen, die heute von den statistischen Ämtern aller Länder verwendet werden, um die jährliche nationale Produktion darzustellen. Diese Tabellen erlauben auch Ergebnisse der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung (VGR) wiederzugeben.

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

Piero Sraffa (1898-1983) hat mit seinem Buch «*Warenproduktion mittels Waren*» (WmW) [8], (1960), die Fundamente zum modernen Verständnis ökonomischer Kreislaufprozesse gelegt. Er betrachtete Waren als Produktionsmittel und als Endprodukte. Unter Annahme konstanter Profitrate und Lohnrate berechnet er Produktionspreise in einer Wirtschaft, die Überschüsse produziert, so dass die Unternehmen Profite und die Arbeitskräfte Löhne beziehen können.

Von der Agrarwirtschaft der Hochkulturen zur Klassik und Neoklassik

Die bestehenden Zeugnisse der Hochkulturen der Ägypter und Mesopotamier im Gebiet des fruchtbaren Halbmondes veranschaulichen intensiv, dass die Menschen von Anbeginn die Naturabläufe beobachtet haben. Sie erfassten den Zyklus der Jahreszeiten, die Wasserführung des Nils, des Euphrat und Tigris, den Einfluss des Wetters, und schliesslich den Kreislauf des Lebens der Pflanzen und Tiere. Beim Aufbau ihrer Landwirtschaft haben diese Hochkulturen der Natur den Kreislauf des Lebens abgeschaut und nachgebildet. Damit entstanden die ersten wirtschaftlichen Produktionskreisläufe. Der Bau der Grundwerkzeuge folgte der gleichen Logik. Dieser organisatorische und handwerkliche Aufbau führte zur Hochblüte dieser Kulturen. Besonders die Ägypter haben in graphischen Wandbildern die zeitliche Abfolge dieser Arbeitsgänge beim Getreideanbau dargestellt: pflügen, säen, ernten, speichern und lagern oder verbrauchen. Die ersten Werkzeuge wurden auch sichtbar dargestellt.

Das Wissen um Wirtschaftskreisläufe ist somit seit diesen Hochkulturen Bestandteil unserer Geschichte. Es ist über Jahrtausende lückenlos von Generation zu Generation weitergegeben worden. Es wurde immer wieder durch grosse Denker und Forscher belegt. So hat der Arzt und Physiokrat François Quesnay (1694-1774) das Kreislaufkonzept wirtschaftlicher Produktionsprozesse in seinen Schriften (1759) als *Tableaux économiques* graphisch dargestellt und mit Rechnungen illustriert.

Man kann zwei Ereignisse identifizieren, welche zur Abweichung von diesem Kreislaufverständnis geführt haben. Als *erstes Ereignis* ist der selbst-widersprüchliche Begriff von Adam Smith (1723 - 1790) zu erwähnen, der 1776 behauptete, dass der Kapitalismus individuellen Egoismus in das Gegenteil verwandelt, nämlich in Gemeinwohl und Dienst an der Gesellschaft, siehe Foley ([2], p. 2). Dieser Mechanismus werde durch die *unsichtbare Hand* geleitet. Wenn jedes Individuum seinen persönlichen Nutzen maximiert, dann wird nach Smith auch der Reichtum der Nationen gesichert. Diese Behauptung ist weder von Smith noch von seinen Nachfolgern je streng und robust bewiesen worden. [2], p. 3.

Die Konzentration auf das Erreichen des persönlichen Nutzens führt uns weg vom Verständnis ganzheitlicher wirtschaftlicher Prozesse, weil sich die Aufmerksamkeit auf das Endprodukt konzentriert, also auf das, was den psychologisch und individuell begründeten Nutzen bringt. Die unabdingbar notwendigen Produktionsmittel, wie Weizen, Eisen, Holz, aus denen in der Wirtschaft auch Werkzeuge fabriziert werden, wie sie auf den Wandbildern der ägyptischen Hochkultur dargestellt wurden, geraten in den Hintergrund.

Die Epoche der Klassik (klassische politische Ökonomie) vertreten durch Adam Smith, David Ricardo und andere, abgestützt auf die Kreislaufauffassung von Produktionsprozessen, dauerte etwa bis 1870. Einer ihrer Grundpfeiler ist die Arbeitswertlehre, die besagt, dass der Preis der Waren wesentlich von der zu ihrer Herstellung nötigen Arbeitszeit abhängt. Das *zweite Ereignis* ist, dass nach 1870 die Arbeitswertlehre durch die Grenznutzenlehre verdrängt wurde. Diese war am Anfang nur eine Theorie des Verhaltens von Konsumenten. Aber um die Jahrhundertwende widmeten sich mehrere Ökonomen dem Vorhaben, mit dem analytischen Apparat der *Grenznutzenlehre* eine *Theorie der Produktion* zu schaffen. Sie stellten dem *Grenznutzen* der Waren die *Grenzproduktivität* der „Produktionsfaktoren“ *Arbeit* und *Kapital* an die Seite. Diese seit 1900 herrschende Richtung wird heute als Neoklassik bezeichnet, obwohl sie mit der Klassik fast nichts gemeinsam hat.

Meistens wird der entscheidende Unterschied zwischen Klassik und Neoklassik in der *Preistheorie* gesehen, also *Arbeitswertlehre* versus *Grenznutzenlehre*. Für das Folgende ist ein anderer Unterschied

wichtiger. In der Neoklassik ist der Produktionsprozess eine Einbahnstraße, die von den Produktionsfaktoren Arbeit (L) und Kapital (K) zu einem nicht näher beschriebenen Produkt Y führt, also «ausbeuten – produzieren – konsumieren – wegwerfen», siehe Aurez [1], (2019), p. 24. Das wird dargestellt in der Gleichung $Y = f(L, K)$, wo f die „Produktionsfunktion“ ist. Welche unerwünschten Nebenprodukte dabei entstehen, woher die Arbeitskräfte und das Kapital kommen, ob und wie oft der Produktionsprozess wiederholt werden kann - danach wird nicht gefragt, siehe Knolle [4]. Aurez [1], (2016), p. XIV, spricht von einer «linearen industriellen Wirtschaft».

Sraffas formale Darstellung der Produktionsprozesse als Wirtschaftskreisläufe

Eine detaillierte verbale Darstellung von Produktionskreisläufen, ausgehend von einer beliebigen Anzahl Zweigen und allen entsprechenden Mengenanteilen der Produktionsmittel stößt an die Grenzen der Sprachfähigkeit. Da haben sich schon einige Autoren die Zähne ausgebissen. Um diese rein sprachlichen Grenzen zu illustrieren wird das elementarste Weizen-Beispiel von Sraffa ([8], Paragraph 1, p. 21), herangezogen, gerade zwei Zweige und zwei Produkte umfassend.

Die folgenden Ausführungen sind an jene von Helmut Knolle [4] angelehnt. Sraffa beginnt sein Werk *Warenproduktion mittels Waren* [8] mit der Betrachtung eines Modells einer sehr einfachen Volkswirtschaft, bestehend aus zwei Zweigen, in der nur Weizen und Eisen produziert werden. Unter Eisen werden hier einfache eiserne Werkzeuge verstanden, die nach einem Jahr abgenutzt sind und ersetzt werden müssen. Die Produktivität ist so gering, dass kein Mehrprodukt erzeugt wird. Es gibt also auch keinen Profit. Die Arbeiter werden nicht mit Geld entlohnt, sondern mit einem *Subsistenzlohn* in Form von Weizen. Im Rahmen der einmal gewählten Technologie müssen die eingesetzten Mengen von Weizen und Eisen in beiden Bereichen in einem festen Verhältnis stehen: jeder Bergarbeiter braucht eine Spitzhacke, jeder Landarbeiter eine Sense, usw. Die Tätigkeit eines Jahres soll durch das folgende Schema beschrieben werden: Im ersten Zweig entstehen aus 8 Tonnen (t) Eisen und 120 Quarter (qr) Weizen die Menge von 20 t Eisen und im zweiten Zweig entstehen aus 12 t Eisen und 280 qr Weizen die Menge von 400 qr Weizen.

Das System verbraucht also in beiden Zweigen $8+12=20$ t Eisen und erzeugt die gleiche Menge Eisen, respektive verbraucht $120+280=400$ qr Weizen und produziert dieselbe Menge Weizen. Die Eisenindustrie produziert über den eigenen Bedarf hinaus 12 t Eisen, die sie gegen 120 qr Weizen eintauschen muss, um ihre Arbeiter und Unternehmer in Subsistenzlohn zu bezahlen. Die Landwirtschaft ihrerseits braucht gerade 12 t Eisen und kann ihren Überschuss von 120 qr Weizen mit der Eisenindustrie eintauschen.

Sraffa hat damit ein *Preismodell* entworfen, damit das *Gleichgewicht* zwischen der Gesamtmenge der Produktionsmittel und der gesamten Verwendung über die Bildung von *Produktionspreisen* (Tauschwerten) erreicht wird. Man stellt fest, dass 1 t Eisen gerade so viel kosten muss wie 10 qr Weizen, damit das ganze System sich Jahr für Jahr reproduzieren kann. In dieser Wirtschaft ist Weizen die geltende *Währung*. Die Arbeiter und Unternehmer erhalten einen Subsistenzlohn in *Weizen*.

Für den Weizenzweig ist der Wert der Produktionsmittel gleich dem Wert der gesamten *Weizenproduktion*: $12 \times 10 + 280 \times 1 = 400 \times 1 = 400$ qr *Weizen*, für die Eisenindustrie ist der Wert der Produktionsmittel gleich dem Wert des produzierten Eisens: $8 \times 10 + 120 \times 1 = 20 \times 10 = 200$ qr *Weizen*. *Die Gesamtproduktion ist also 600 qr Weizen wert*. Man kann diese Äquivalenz auch anders formulieren: Der Weizenzweig muss am Ende des Jahres 120 qr *Weizen* der Eigenproduktion gegen 12 t *Eisen* an die Eisenindustrie abtreten und die Eisenindustrie braucht die 120 qr *Weizen*, um damit 12 t *Eisen* an den Weizenzweig abtreten zu können.

Der Weizenzweig braucht die verbleibenden 280 qr Weizen teils als Saatgut, teils zur Entlohnung seiner Arbeiter und Unternehmer und die 8 t Eisen in Form von Werkzeugen für die nächstfolgende jährliche Produktion. Die Eisenindustrie braucht die 120 qr Weizen, um seinen Arbeitern und Unternehmern einen Subsistenzlohn auszuzahlen. Die ihm verbleibenden 8 t Eisen braucht er in Form von Werkzeugen

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

zur Eisenproduktion. Das System ist im *Gleichgewicht*, wenn Einnahmen und Ausgaben gleich sein sollen, für 10 qd Weizen müssen also 1 t Eisen bezahlt werden.

Das war also eine verbale Beschreibung des elementarsten Beispiels von Sraffa. Es gab noch keinen Produktionsüberschuss, keinen Profit für die Unternehmer, keinen Lohn für Arbeitnehmer und ausschließlich Subsistenzlohn für alle Beteiligten. Die Komplexität der verbalen Darstellung von Kreislaufprozessen ist damit augenscheinlich. Dies scheint auch tatsächlich ein Grund dafür, weshalb detaillierte Einzelheiten des Kreislaufkonzeptes einem weiteren Publikum kaum vertraut sind. FachökonomInnen, welche sich ausschließlich der verbalen Darstellung und nicht der Matrizenalgebra bedienen, ist die Zugänglichkeit offensichtlich auch erschwert.

Mit den Mitteln der Matrizenalgebra gelingt hingegen die Beschreibung von Kreislaufprozessen auf sehr elegante Weise.

Im nachfolgenden Abschnitt wollen wir nun zeigen, was das Buch **Sraffa and Leontief revisited** leistet.

Von Sraffas elementarstem Beispiel zu den SWISS-IOT 2014 (49 Sektoren/Produktgruppen)

Strenge matrizenalgebraische Darstellung von Sraffas Kreislaufökonomie

Sraffas Werk «*Warenproduktion mittels Waren*» [8] (1960) ist sehr bald nach seiner Veröffentlichung bei einigen namhaften Volkswirtschaftlern (Pasinetti, Schefold) und Mathematikern (Newman) auf grosses Interesse gestossen. Seither ist viel Arbeit vollbracht worden, um Sraffas Buch mathematisch zu vervollständigen. So haben Peter Newman und Ann Arbor [6] mit ihrem Aufsatz explizit dargestellt, dass der Satz von Perron-Frobenius die algebraische Grundlage des Sraffa Preismodelles mit Überschuss ist, welcher in Profit transformiert wird. Dabei erhalten die Werktätigen nur einen Subsistenzlohn. Newman hat somit richtigerweise die Berechnung der durchwegs positiven Preise auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt. Weiter haben die beiden Autoren auch das allgemeine Sraffa Preismodell mit Profit und entlohnter Arbeit gelöst und die Bedingungen der Existenz auftretender inverser Matrizen formuliert, und zwar unter Bezug auf Sätze aus Felix R. Gantmacher [3] und anderen, um auch hier richtigerweise durchwegs positive Preise als Lösungen zu gewinnen.

Bertram Schefold hat im Jahre 1976 in einem Nachwort der deutschsprachigen Sraffa Suhrkamp Ausgabe [8], Sraffa's Grundthesen nochmals mathematisch formuliert und vervollständigt.

Unsere Absicht ist, die bestehende Literatur (Pasinetti, Schefold, Kurz und Salvadori) zu ergänzen, und zwar durch eine rechen- und anwendungsorientierte Darstellung durchwegs mittels Verwendung moderner Matrizennotationen mit Bezug auf die einschlägigen Theoreme der Matrizenalgebra. Für die Ausrechnung von Zahlenbeispielen und Anwendungen auf die Input-Output-Tabellen Deutschlands, der Schweiz und weiterer Länder sind die Softwarepakete MATHEMATICA und MATLAB herangezogen worden, und zwar mit ihren Rechen- und Graphikfähigkeiten. Damit geht eine Linie von Sraffas Kreislaufmodell zu dessen formalen Beschreibung durch Matrizen und Bezug auf Theoreme, bis zu den Ausrechnungen mittels moderner Software und Interpretation der zahlenmässigen Resultate.

Unsere Erfahrung zeigt, dass es ohne rigorose Verwendung der Matrizenalgebra unmöglich ist die Kreislaufökonomie als ein geschlossenes System vollständig in einer beliebigen Dimension zu beschreiben. Die obige verbale Darstellung des elementarsten Sraffa Preismodelles illustriert diesen Sachverhalt deutlich. Es ist wesentlich zu erklären, welchem Bereich der Mathematik diese Rechnungen zugrunde liegen: Es handelt sich um die Gruppe der Perron-Frobenius Theoreme. Wir haben in unserem Buch auch den Fächer der verschiedenen Lemmata und Theoreme vervollständigt, die zu dieser Satzgruppe gehören. Die zugehörigen Beweise sind angefügt worden, wenn dies notwendig erschien. Das Standardwerk von Gantmacher [3] hat uns inspiriert.

Sraffa and Leontief revisited, mathematical Methods and Models of a Circular Economy, de Gruyter,

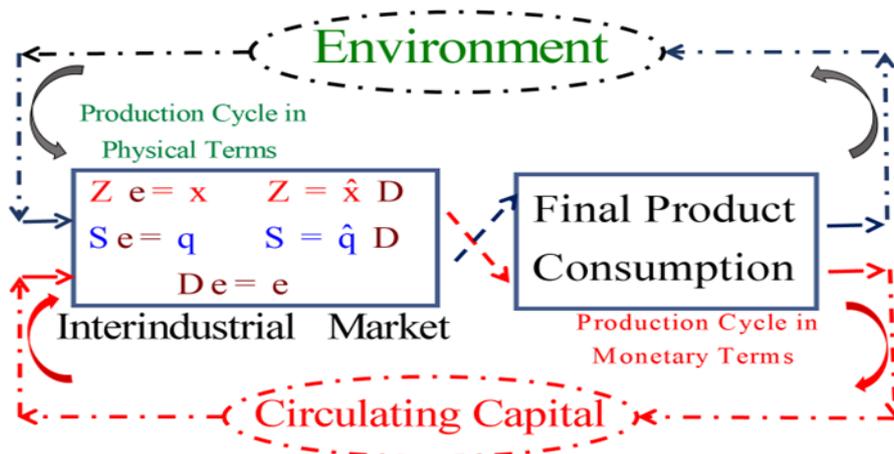
11'237	1	1-3	Agriculture, forestry and fishing
7'149	2	3-5	Mining and quarrying
18'191	3	9-10	Manufacture of food and tobacco products
3'965	4	13 - 15	Manufacture of textiles and apparel
9'604	5	16	Manufacture of wood and of products of wood and cork, except furniture
4'091	6	17	Manufacture of paper and paper products
3'599	7	18	Printing and reproduction of recorded media
23'046	8	19 - 20	Manufacture of coke, chemicals and chemical products
44'786	9	21	Manufacture of basic pharmaceutical products and Pharmaceutical preparations
7'494	10	22	Manufacture of rubber and plastic products
8'322	11	23	Manufacture of other non-metallic mineral products
11'527	12	24	Manufacture of basic metals
18'047	13	25	Manufacture of fabricated metal products, except machinery And equipment
33'175	14	26	Manufacture of computer, electronic and optical products
12'286	15	27	Manufacture of electrical equipment
7'728	16	28	Manufacture of machinery and equipment n.e.c.
1'895	17	29	Manufacture of motor vehicles, trailers and semi-trailers
2'030	18	30	Manufacture of other transport equipment
650	19	31	Manufacture of furniture
2'042	20	32	Other manufacturing
4'144	21	33	Repair and installation of machinery and equipment
32'470	22	35	Electricity, gas, steam and air-conditioning supply
4'891	23	36 - 39	Water supply, waste management
23'831	24	41 - 43	Construction
5'829	25	45	Wholesale and retail trade and repair of motor vehicles and motorcycles
64'563	26	46	Wholesale trade, except of motor vehicles and motorcycles
3'829	27	47	Retail trade, except of motor vehicles and motorcycles
38'045	28	49 - 51	Land, water and air transport and transport via pipelines
21'767	29	52	Warehousing and support activities for transportation
4'687	30	53	Postal and Courier Aktivitas
1'318	31	55	Accommodation
1'996	32	56	Food and beverage service activities
7'040	33	58 - 60	Publishing, audiovisual and broadcasting activities
8'845	34	61	Telecommunications
13'488	35	62 - 63	IT and other information services
34'117	36	64	Financial service activities
8'652	37	65	Insurance
10'162	38	68	Real estate activities
64'390	39	69 - 71	Legal, accounting, management, architecture, engineering activities
1'567	40	72	Scientific Research and Developern
7'232	41	73 - 75	Other professional, scientific and technical activities
34'633	42	77 - 82	Administrative and support service activities
4'988	43	84	Public administration
6'945	44	85	Education
1'138	45	86	Human health activities
2'664	46	87 - 88	Residential care and social work activities
4'836	47	90 - 93	Arts, entertainment and recreation
3'511	48	94 - 96	Other service activities
	49	97 - 98	Activities of households as employers of domestic personnel / Undifferentiated goods- and services-producing activities of private households for own use
0			
652'440			TOTAL

Bezeichnung der Sektoren der schweizerischen Input-Output-Tabelle SWISS-IOT 2014

Folgendes Modellkonzept wurde eingeführt, um die Anwendbarkeit auf freie Märkte zu unterstreichen: Jede Ware, beispielsweise Weizen oder Eisen, ist in einer freien Wirtschaft durch **vier Attribute** gekennzeichnet: die *Quantität*, den *Preis*, den *Wert* und das *Objekt*. Der Begriff Objekt ist dabei so zu verstehen, dass in einer freien Wirtschaft zu jedem Produkt mehrere Ausführungen existieren, so dass der Käufer die Freiheit hat, *Exemplar einer Sorte / Produkte / Zweig* auszuwählen. Dies gilt typisch für den Kauf eines Fahrrads. Letztlich entscheidet sich der Käufer für den Fahrradtyp einer Marke. Bei jedem freien Kauf-Verkauf einer Ware sind somit **vier Freiheitsgrade** vorhanden: *Objektwahl* e , *Preis* p , *Quantität* q und *Wert* x . Dieses Grundkonzept führt zu einer Erneuerung der algebraischen Darstellung.

Dieses Konzept der vier Attribute wurde bei symmetrischen nationalen Input-Output-Tabellen angewandt, welche aus Sektoren (homogene CPA-Branchen) bestehen, die CPA-Produktegruppen erzeugen. Sraffas Zweige entsprechen dann diesen Sektoren, während Sraffas Produkte den CPA-Produktegruppen entsprechen. Die Abkürzung CPA bedeutet: Statistical Classification of Products by Activity in the European Economic Community.

Bis jetzt hatte man im Allgemeinen nur zwei Stufen von Matrizen, jene der Verflechtung und jene der Koeffizienten. Diese Struktur wird nun auf vier Stufen (4 Input-Output Matrizen Z, T, S, D , 4 Zustandsmatrizen A, B, C, D , 4 Marktaktivitätsvektoren x, p, q, e) erweitert. Diese mathematische Vervollständigung und diese Abrundung sind in unserem Buch behandelt und wie folgt graphisch dargestellt:

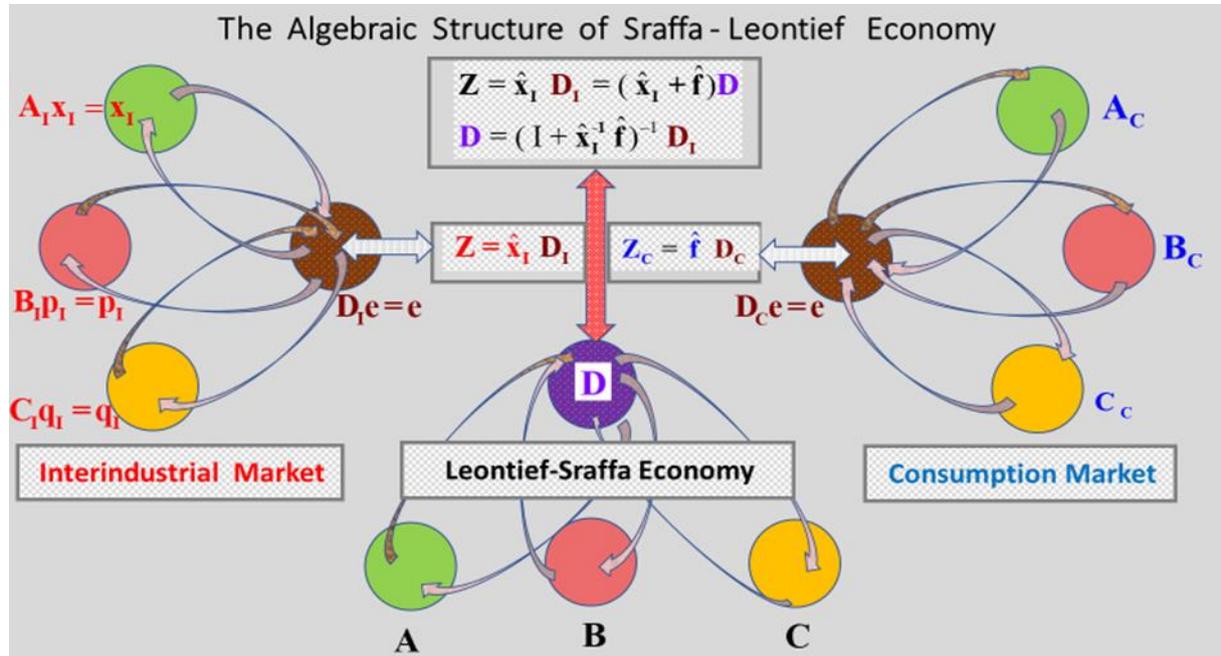


Sraffas Warenproduktion mittels Waren (WmW) durch Kreisläufe, in physischen und in monetären Termen: Die Zeilensummen der Matrizen Z und S sowie die stochastische Produktionsmatrix D des interindustriellen Marktes bestimmen q and x . Die Komponenten des Vektors x repräsentieren die Werte der interindustriellen Produktion, während die Komponenten des Vektor q die Gesamtmenge je der Produktegruppen bestimmen. Die Elemente der Technologie Matrix D repräsentieren den Einfluss jedes Sektors auf die Technologie der anderen Sektoren.

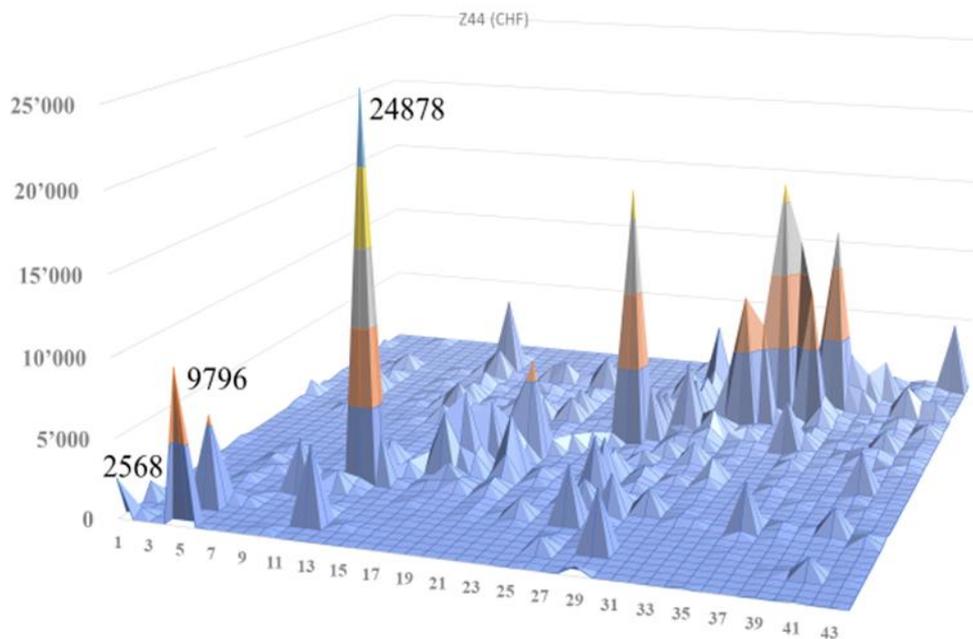
The Stochastic Similarity Table of Interindustrial Production					
		Row-sum	PF-Eigenvektor	Stochastic similarity	I/O matrices
Value	x	$Z e = x$	$A x = x$	$A = \hat{x} D \hat{x}^{-1}$	$Z = \hat{x} D$
quantity	q	$S e = q$	$C q = q$	$B = \hat{p} D \hat{p}^{-1}$	$T = \hat{p} D$
price	p	$T e = p$	$B p = p$	$C = \hat{q} D \hat{q}^{-1}$	$S = \hat{q} D$
Object	e	$D e = e$	$D e = e$	$D = \hat{e} D \hat{e}^{-1}$	$D = \hat{e} D$

Matrix- und Vektorrelationen im interindustriellen Markt: Die Elemente der Warenflussmatrix Z sind eine Aufschlüsselung der Komponenten des Wertevektors x , während die Elemente der Matrix T eine

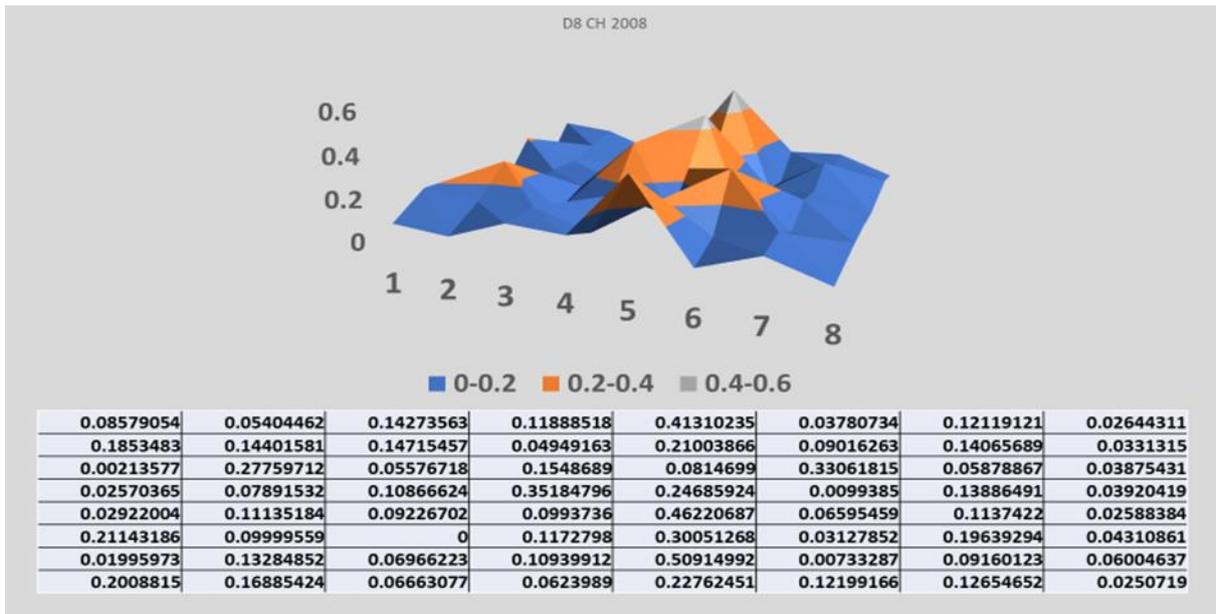
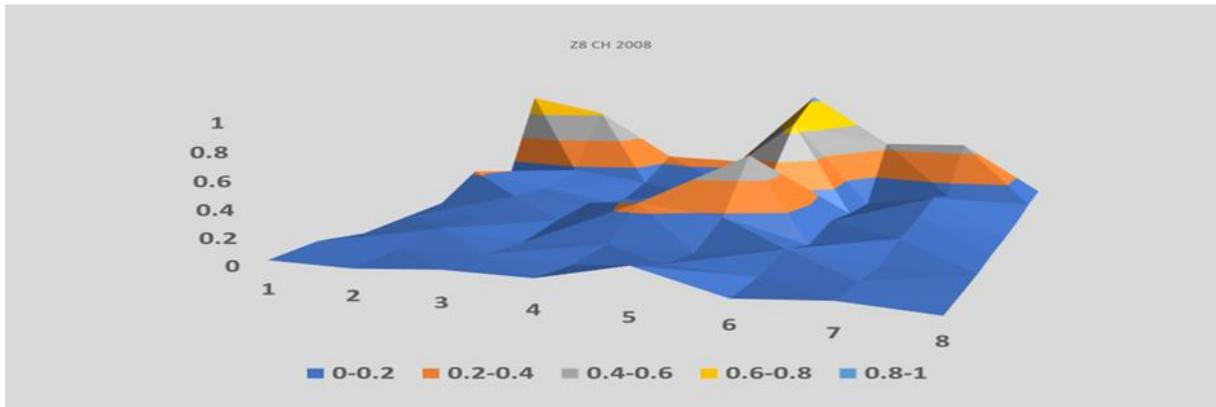
Aufschlüsselung der Komponenten des Preisvektors \mathbf{p} darstellen. Das Analoge gilt für die Elemente der Matrix \mathbf{S} , welche die Abhängigkeit des Gesamtmengenvektors \mathbf{q} der produzierten Quantitäten von der Produktion anderer Sektoren darstellt. Die positiven Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{q} und der technologische Objektvektor \mathbf{e} sind die **Perron-Frobenius Eigenvektoren (PF-eigenvektor in der Tabelle)** der zugehörigen Zustandsmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} .



Graphische Darstellung der algebraischen Modellierung der Sraffa-Leontief Wirtschaft und ihrer Beziehungen mit dem interindustriellen Markt und dem Konsumentenmarkt: Die Zustandsmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} and \mathbf{D} des Marktes sind dargestellt zusammen mit den entsprechenden *Perron-Frobenius Eigenvektoren* der Werte \mathbf{x} , der Preise \mathbf{p} , der Quantitäten \mathbf{q} und der technologischen Objekte \mathbf{e} .



Graphische Darstellung der Input-Output Matrix \mathbf{Z} (44 Sektoren / jeder Sektor produziert eine einzige CPA-Produktegruppe zu einem einzigen Preis) der schweizerischen interindustriellen Produktion 2008 (510.79 Milliarden CHF).



Value: CH 2008 $x = Ax = Ze$

Z 6						A 6					
0.4926	0.0792	0.2400	0.2015	0.0198	0.0440	0.4572	0.0727	0.2652	0.6364	0.0257	0.2614
0.0334	0.9805	0.0020	0.0370	0.0186	0.0182	0.0310	0.8995	0.0022	0.1170	0.0241	0.1083
0.0752	0.0469	0.6401	0.0923	0.0165	0.0337	0.0698	0.0431	0.7072	0.2916	0.0214	0.2006
0.0303	0.0723	0.0023	0.1822	0.0007	0.0285	0.0282	0.0664	0.0026	0.5753	0.0010	0.1694
0.0155	0.0445	0.0078	0.0246	0.6656	0.0141	0.0144	0.0409	0.0086	0.0776	0.8618	0.0838
0.0042	0.0586	0.0002	0.0179	0.0027	0.0844	0.0039	0.0538	0.0002	0.0566	0.0035	0.5019

Object: D e = e

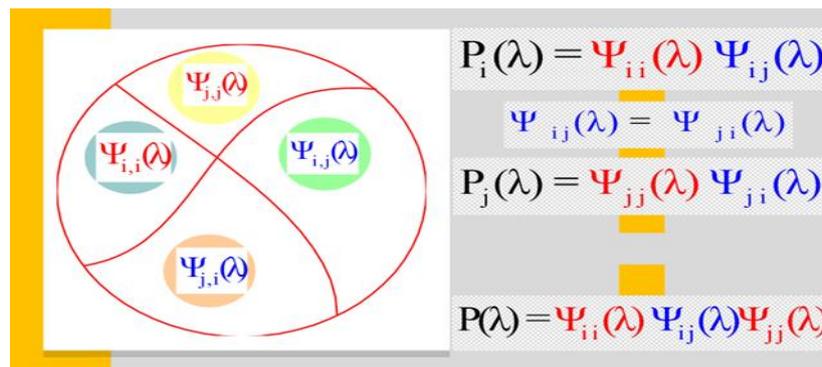
D 6						e
0.4573	0.0736	0.2228	0.1871	0.0185	0.0408	1
0.0307	0.8996	0.0019	0.034	0.0171	0.0167	1
0.0832	0.0519	0.7072	0.102	0.0183	0.0373	1
0.096	0.2286	0.0075	0.5754	0.0025	0.0901	1
0.0202	0.0577	0.0101	0.0319	0.8618	0.0183	1
0.025	0.3485	0.0016	0.1066	0.0164	0.5019	1

Oben: Graphische Darstellung der Input-Output Matrizen (Warenfluss Matrizen) **Z8** and **D8** – in Tabellenform – der grössten 8 Sektoren der schweizerischen SWISS IOT 2008, normiert durch den Perron-Frobenius (PF) Eigenwert der offiziellen Warenflussmatrix der SWISS IOT 2008. Unten: Die Matrizen **Z6**, **A6**, **D6** der sechs grössten Sektoren. Der Wertevektor **x6** ist der Perron-Frobenius Eigenvektor der Zustandsmatrix **A6**. Er ist gleichzeitig die Zeilensumme der Matrix **Z6**. Die Matrix **D6** ist eine rechts-stochastische Matrix. Ihr Eigenvektor ist der technologische Objektvektor **e**. Die Elemente der Technologie Matrix **D6** geben an wie die Technologie eines Sektors an der Technologie der anderen 5 Sektoren teilnimmt.

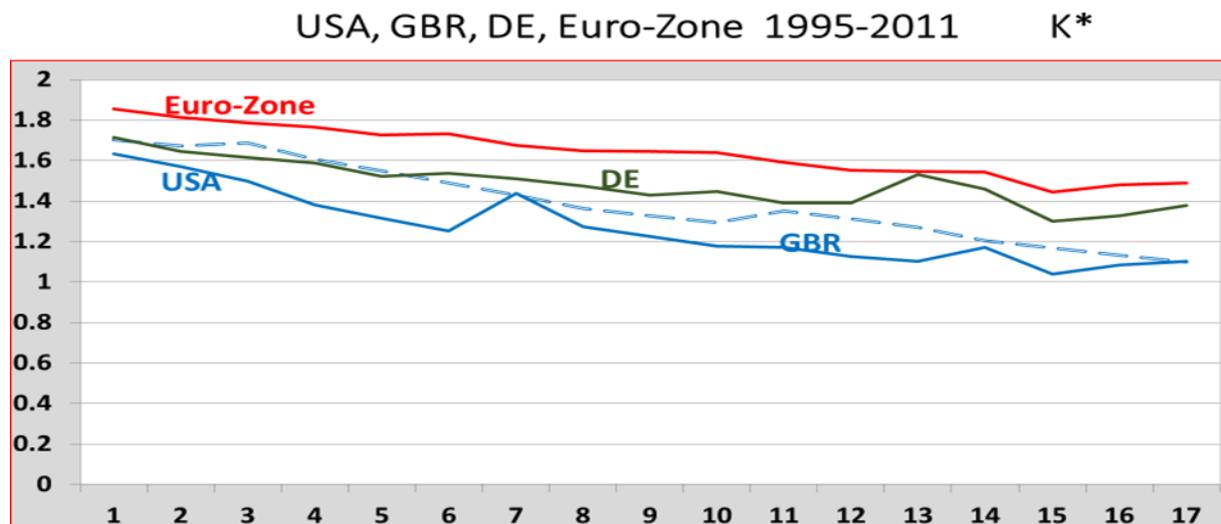
Sraffas Basiszweige, respektive Basisprodukte

Sraffa [8] unterschied in einer Kreislaufökonomie bestehend aus n Zweigen und n Produkten, den Fall der Einprodukt-Zweige, da jeder Zweig nur genau ein Produkt erzeugt, und den Fall der Mehrprodukt-Zweige (Kuppelproduktion), da jeder Zweig ein oder mehrere Produkte erzeugt. In beiden Fällen gibt es den fundamentalen ökonomischen Begriff der *Basiszweige*, respektive der *Basisprodukte*, welche wesentlich sind für eine gegebene Wirtschaft, wie der Landwirtschaftszweig, der Weizen, Holz und Gemüse produziert und die Existenz des ganzen Systems sichert. Im Gegensatz dazu gibt es die *Nicht-Basiszweige*, respektive *Nicht-Basisprodukte*, welche nicht unerlässliche *Luxusgüter* produzieren mögen, etwa – historisch gesehen – Juwelen und Rennpferde. Eine wichtige Frage ist die Bestimmung der Zahl m der *Nicht-Basiszweige* unter den n Zweigen, welche zur Zahl der *Basiszweige* $n-m$ führt. Sraffa ([8], Par. 6, 60) gibt im Falle der Einprodukt-Zweige und der Kuppelproduktion spezifische Methoden an, diese Zahl m zu bestimmen. Schefold [7] formulierte Sraffas Methode im Falle der Kuppelproduktion in Termen der Matrixalgebra.

In unserem Buch haben wir Schefold's Matrix Methode aufgegriffen und es als Matrixrangkriterium formuliert, das direkt ermöglicht, die Zahl m zu bestimmen. Wir haben auch andere Methoden zusammengestellt, um die Zahl m zu bestimmen, wie die Berechnung der Matrix, welche von Pasinetti vorgeschlagen worden ist. Diese wurden mit zahlreichen numerischen Beispielen illustriert. Wir haben auch den Ursprung dieser Matrizen Methodologie identifiziert, sie geht zurück auf Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908-1988). Es handelt sich um ein hochmathematisches Konzept, das wir mit nachfolgender Figur und den untenstehenden Erklärungen kurz darstellen.



Graphische Darstellung zu den Basiszweigen (Der Sraffa Begriff *Zweig* kann durch *Sektor* ersetzt werden, wenn die Anwendung IOT betrifft.): Der Zweig i erzeugt durch die entsprechenden Vektoren \mathbf{x}_i , \mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i , \mathbf{e}_i einen zyklischen Einflussraum, der durch sein charakteristisches Polynom $P_i(\lambda)$ dargestellt wird. Das gleiche gilt für den Zweig j mit dem charakteristischen Polynom $P_j(\lambda)$. Wenn zwei Zweige andere Zweige beeinflussen, dann ist die Dimension aller beeinflussbaren Zweige – einschliesslich ihrer eigenen Einflussräume – gegeben durch das Produkt $P(\lambda)$ der drei Polynome. Die beiden Zweig-Polynome sind deshalb nicht teilerfremd. Das **blaue Polynom $\Psi_{ij}(\lambda)$ oder $\Psi_{ji}(\lambda)$ repräsentiert** den Raum, der durch beide Zweige beeinflusst ist. Wenn die Dimension von $P(\lambda)$ gleich n ist, dann sind die beiden Zweige Basiszweige. Wenn die Dimension von $P_i(\lambda)$ gleich n ist, dann hat die zugehörige Zustandsmatrix eine einfache (zyklische) Struktur und kann zu einer Frobenius Form transformiert werden (Phasen-zustandsform). In so einem Fall sind die Polynomkoeffizienten direkt auch die Koeffizienten der Frobenius Form bestimmt. Der Ursprung dieser Bedingungen geht zurück auf L. S. Pontrjagin. Es existieren bereits effiziente Algorithmen, um nicht nur den Einflussraum, aber auch die Einflusskoeffizienten über die Zustandsmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} and \mathbf{D} zu bestimmen. Des Weiteren können beliebige geeignete konvexe Kombinationen von vorgeschlagenen Einflussvektoren bezüglich Ihres **Einflusses** geprüft werden.



Das monatliche Zirkulationskapital K^* (normiert durch den entsprechenden Frobenius-Perron Eigenwert der Verflechtungsmatrix der Input-Output-Tabelle (IOT)) des Landes USA, GBR, DE, Euro-Zone über 17 Jahre (1995-2011).

Mit dem Buch **Sraffa and Leontief revisited** wollen wir die Literatur-Lücke schliessen, die eben beschrieben wurde.

Das Buch enthält verschiedene interessante Resultate, von denen einige hier erläutert werden.

a) Hassan. A. Nour Eldin hat eine vollständige Analyse der algorithmischen Eigenschaften des interindustriellen Marktes erreicht. Die interindustrielle Wirtschaft ist formuliert als ein Randwertproblem, wo die Vektoren der Werte x , der Preise p , der Quantitäten q und der Objekte e entsprechend die *Perron-Frobenius Eigenvektoren* der Zustandsmatrizen **A**, **B**, **C** und **D** sind. Sie sind auch gleichzeitig die Zeilensummen der Warenflussmatrix **Z**, der Matrizen **T**, **S** and **D**. Die Technologiematrix **D** ist eine rechts-stochastische Matrix der Zustandsmatrizen **A**, **B** und **C**. Ihre Komponenten beeinflussen deshalb alle anderen Matrizen und Vektoren.

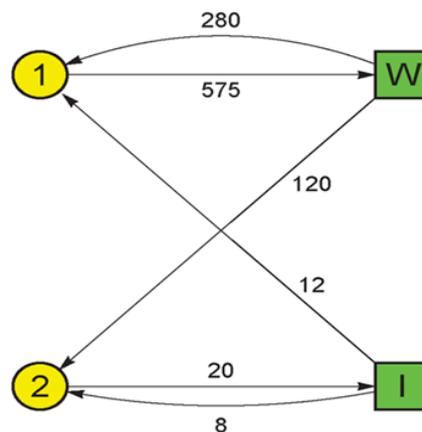
b) Es gibt den fundamentalen ökonomischen Begriff der *Basiszweige*, respektive der *Basisprodukte*, welche jene Zweige bezeichnen, die für eine Wirtschaft unabdingbar notwendig sind, wie der Landwirtschaftszweig, der Weizen, Holz oder Gemüse produziert. Diese garantieren, dass das gesamte System funktioniert. Andererseits gibt es die *Nicht-Basiszweige*, welche nicht unentbehrliche Luxusgüter produzieren mögen, wie Juwelen oder Reitpferde. Unser Buch präsentiert ein einfach anwendbares Matrixrangkriterium, mit dem die Anzahl der *Nicht-Basiszweige bestimmt werden kann*. Dadurch kann man die Anzahl der *Basiszweige* in einem Sraffa Preismodell leicht bestimmen.

c) Das Sraffa-Preismodell, bei dem der Überschuss nicht in Profit und Lohn aufgeteilt wird, ermöglicht ein Produktivitätsmass R der beschriebenen Ökonomie zu definieren. Die Verflechtungsmatrix einer symmetrischen nationalen Input-Output Tabelle (IOT) wurde als Grundlage eines solchen Preismodelles genommen. Hassan A. Nour Eldin konnte dann zeigen, dass besagtes Produktivitätsmass R berechnet werden kann, ohne die Preise des Modelles bestimmen zu müssen. Es zeigt sich auch, dass es sich hier um eine Randwertaufgabe handelt, wie sie aus der Physik bekannt sind. Damit ist gezeigt, dass ein Sraffa Preismodell mit einer Input-Output-Tabelle zu einem dynamischen System verbunden werden kann.

d) Helmut Knolle hat das Sraffa Preismodell dahingehend erweitert, dass das Rezyklieren von Abfallprodukten einbezogen wird und dabei trotzdem Gewinn erwirtschaftet werden kann.

e) Jean-François Emmenegger hat gezeigt, dass das Sraffa Preismodell so erweitert werden kann, dass jeder Zweig eine eigene Lohnrate und Gewinnrate hat, so dass mit reellen Lohn- und Gewinnverteilungen gearbeitet werden kann.

f) Daniel Chable hat die extensive Verwendung von *Graphen* und *gerichteten Graphen* vorgeschlagen, um Produktionsschemen von Preismodellen darzustellen. Sie werden als Sraffa Netzwerke bezeichnet. Wir zeigen ein solches Netzwerk für das dritte elementare Beispiel von Sraffa ([8], Paragraph 5), entwickelt aus dem oben präsentierten elementaren Beispiel, bei dem aber eine Gesamtproduktion von 575 q Weizen vorliegt. Kreise bedeuten Produktionszweige, Quadrate die Produkte. Wir haben auch Kriterien entwickelt, die Präsenz von *Basisprodukten* und *Nicht-Basisprodukten* in Graphen und gerichteten Graphen festzustellen, die Produktionsschemen von Preismodellen repräsentieren.



Unser Buch liefert eine neue Perspektive zum Verständnis der inneren Natur der Kreislaufwirtschaft. Die Matrizenalgebra erweist sich als ideales Werkzeug zur Beschreibung der Kreislaufökonomie und zur Darstellung der Waren, die einmal als Produktionsmittel und einmal als Endprodukte erscheinen. Da sind auch die vielen didaktisch aufgebauten Beispielen und Anwendungen auf die Input-Output-Tabellen (IOT) von Leontief verschiedener Länder. Die Sätze und Lemmata mit den zugehörigen Beweisen, die notwendig sind die verschiedenen Varianten von Sraffa Preismodellen und die Grundlagen zu verstehen, sind in vervollständigter Form aufgeführt worden.

Bibliographie

- [1] Aurez, Vincent, Georgeault Laurent, *Economie circulaire, Système économique et finitude des ressources*, De Boeck Supérieur s.a., Louvain-la-Neuve, (2016) und (2019)
- [2] Foley, D. K., *Adam's Fallacy, A guide to economic Theology*, The Belknap Press of Harvard University Press, 2006.
- [3] Gantmacher, F., R., *Matrizentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [4] Knolle, Helmut, *Die Wachstumsgesellschaft, Aufstieg, Niedergang und Veränderung*, Köln, PapyRossa, (2016).
- [5] Leontief, Wassily Wassiljewitsch, *Die Wirtschaft als Kreislauf*, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, 60, pp. 577--623, Berlin, (1928).
- [6] Newman, P., Arbor A., *Production of Commodities by means of Commodities*, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaftslehre und Statistik, 98. Jg., pp. 58--75, (1962).
- [7] Schefold, Bertram, 'Mr. Sraffa on Joint Production and other Essays', Routledge, (1989).
- [8] Sraffa, Piero, *Warenproduktion mittels Waren*, (mit einem Anhang von Bertram Schefold), deutsche Auflage im Verlag Suhrkamp 780, (1976), erste englische Auflage im Verlag Cambridge University Press, Cambridge (1960).