à copier

Exercices 1

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

1. Donnez une démonstration du principe de l'identité, c-à-d. démontrez 'a=c' à partir des prémisses 'a=b' et 'b=c' moyennant le principe de l'indiscernabilité des identiques.

2. Supposons connue la signification des symboles prédicatifs du langage du monde de Tarski. Lesquelles des conclusions suivantes sont des conséquences logiques des prémisses correspondantes ?
   Justifiez la réponse dans le cas d'une conséquence logique. Si la conclusion n'est pas une conséquence logique des prémisses correspondantes, construire un monde de Tarski, dans lequel les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse.
   i) Prémisse : GaucheDe(a,b) ; Conclusion : DroiteDe(b,a)
   ii) Prémisses : GaucheDe(a,b), b=c ; Conclusion : DroiteDe(c,a)
   iii) Prémisses : GaucheDe(a,b), DroiteDe(c,a) ; Conclusion : GaucheDe(b,c)
   iv) Prémisses : Derrière(a,b), Devant(a,c) ; Conclusion : Devant(b,c)
   v) Prémisses : Entre(b,a,c), GaucheDe(a,c) ; Conclusion : GaucheDe(a,b)

3. Formalisez la démonstration de l'exercice 1.

4. Donnez une démonstration formelle de la proposition 'Aime(a,d)' à partir des prémisses 'Aime(a,b)', 'b=c' et 'c=d'.

5. Donnez une démonstration formelle de la proposition 'Entre(c,d,e)' à partir des prémisses 'Entre(a,d,b)', 'a=c' et 'e=b'.

6. Le symbole prédicatif 'PlusPetit' du langage du monde de Tarski est transitif, c-à-d. de 'PlusPetit(a,b)' et 'PlusPetit(b,c)' suit logiquement 'PlusPetit(a,c)'.
   i) Formulez cette règle dans le style d'une règle de Fitch
   ii) Employez cette nouvelle règle de Fitch pour donner une démonstration formelle de 'PlusPetit(a,d)' à partir des prémisses 'PlusPetit(a,b)', 'PlusPetit(c,d)' et 'b=c'.

Exercices 2

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

1. La liste suivante contient des étapes de démonstration dont seulement quelques-unes sont valides. Déterminez pour chaque étape de démonstration si elle est valide. Si elle est valide, expliquez pourquoi, en vous référant aux tables de vérité correspondantes. Si elle n'est pas valide, donnez un exemple comment cette étape de démonstration pourrait être employée afin d'obtenir une conclusion fausse à partir de prémisses vraies.
   - i) Q peut être déduit à partir de $P \vee Q$ et $\neg P$.
   - ii) $\neg P$ peut être déduit à partir de $P \vee Q$ et Q.
   - iii) $\neg P$ peut être déduit à partir de $\neg(P \vee Q)$
   - iv) $\neg P$ peut être déduit à partir de $\neg(P \wedge Q)$

2. Selon une certaine démonstration, il existe des nombres irrationnels b et c, tels que b^c est rationnel, une des étapes de la démonstration consistait dans l'affirmation que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou irrationnel. Question : Qu'est-ce qui justifie l'adoption de cette affirmation dans ladite démonstration ?

3. Supposez données les prémisses suivantes :
   - i) AGaucheDe(a,b) ∨ ADroiteDe(a,b)
   - ii) Derrière(a,b) ∨ ¬AGaucheDe(a,b)
   - iii) Devant(b,a) ∨ ¬ADroiteDe(a,b)
   - iv) Grand(c)

   Question : Est-ce que la proposition 'Derrière(a,b)' est une conséquence logique de ces prémisses ? Si oui, donnez une démonstration (informelle). Si non, construisez un monde de Tarski, dans lequel les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse.

4. Traduisez les propositions suivantes en LLPO et démontrez (informellement) que la 4[e] proposition suit logiquement des trois premières.
   - i) Max ou Claire est à la maison, mais Scruffy ou Charles est malheureux.
   - ii) Max n'est pas à la maison ou Charles est heureux.
   - iii) Claire n'est pas à la maison ou Scruffy est malheureux.
   - iv) Scruffy est malheureux.

5. Considérez les propositions suivantes :
   - i) Folly était la disquette de Claire à 14h ou à 14h05.
   - ii) Folly était la disquette de Max à 14h.
   - iii) Folly était la disquette de Claire à 14h05.

   Est-ce que iii suit logiquement de i et ii ? Est-ce que ii suit logiquement de i et iii ? Est-ce que i suit logiquement de ii et iii ? Dans chaque cas, donnez une démonstration de la conséquence logique ou décrivez une situation dans laquelle les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse.

   Remarque : Vous pouvez supposer qu'une seule personne à la fois peut posséder une disquette à un moment donné.

Exercices 3

Introduction à la logique formelle II

SE 2006

1. La démonstration suivante est incomplète. Il y manque quelques justifications et quelques propositions ; ces lacunes sont indiquées par des points d'interrogation. Remplissez ces lacunes.

1. P ∨ (Q ∧ R)	
2. ▽ P	
3. P ∨ Q	▽ Rule?:
4. P ∨ R	▽ Rule?:
5. ?	▽ ∧ Intro: 3,4
6. ▽ Q ∧ R	
7. Q	▽ Rule?:
8. P ∨ Q	▽ ∨ Intro: 7
9. R	▽ Rule?:
10. ?	▽ ∨ Intro: 9
11. (P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)	▽ ∧ Intro: 8,10
12. (P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)	▽ Rule?:

2. Donnez une démonstration formelle de
   i. a=c à partir de la prémisse (a=b) ∧ (b=c)
      (évidemment sans utiliser la règle de la transitivité de l'identité !!!)
   ii. C∨B à partir de la prémisse (A∧B) ∨ C

3. La démonstration suivante sans prémisse de P∨¬P est incomplète. Remplissez les lacunes correspondantes, comme dans l'exercice 1.

1.	
2. ▽ ¬(P ∨ ¬P)	
3. ▽ P	
4. ?	▽ ∨ Intro: 3
5. (P ∨ ¬P) ∧ ¬(P ∨ ¬P)	▽ ∧ Intro: 3,4
6. ¬P	▽ Rule?:
7. ▽ ?	
8. P ∨ ¬P	▽ ∨ Intro: 7
9. (P ∨ ¬P) ∧ ¬(P ∨ ¬P)	▽ Rule?:
10. ¬¬P	▽ ¬ Intro: 7-9
11. ¬P ∧ ¬¬P	▽ ∧ Intro: 6,10
12. ¬¬(P ∨ ¬P)	▽ ¬ Intro: 2-11
13. (P ∨ ¬P)	▽ Rule?:

4. Démontrez formellement P∨(Q∧R) à partir des prémisses P∨Q et P∨R. (Remarque : employez une sous-démonstration à l'intérieur d'une sous-démonstration…)

5. Donnez des démonstrations informelles des propositions suivantes (sans recours aux lois de De Morgan). Ensuite, donnez des démonstrations formelles qui reflètent autant que possible vos démonstrations informelles.
   i. ¬P∧¬Q à partir de la prémisse ¬(P∨Q)
   ii. ¬(P∨Q) à partir de la prémisse ¬P∧¬Q

Exercices 4

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

1. Pour apprécier l'utilité du recours aux théorèmes antérieurs, écrivez la démonstration formelle complète de '$(P \wedge Q) \vee \neg P \vee \neg Q$' sans mentionner un seul théorème antérieur. Comparez cette démonstration avec celle présentée au cours. (Cet exercice est difficile !)

2. Donnez une démonstration formelle de 'Petit(c)' à partir des prémisses 'Cube(c)$\vee$Petit(c)' et 'Dodec(c)'. Employez à la place du concept ordinaire de contradiction celui de la contradiction généralisée.

3. Démontrez informellement les règles de démonstration suivantes :
   i) Modus Tollens : A partir de $A \rightarrow B$ et $\neg B$, on peut déduire $\neg A$.
   ii) Affaiblissement du conséquent : A partir de $A \rightarrow B$, on peut déduire $A \rightarrow (B \vee C)$
   iii) Transitivité de l'équivalence : A partir de $A \leftrightarrow B$ et $B \leftrightarrow C$, on peut déduire $A \leftrightarrow C$.

4. Démontrez informellement 'Irrationnel(x) $\rightarrow$ Irrationnel($\sqrt{x}$)'.

5. Démontrez informellement les points suivants :
   i) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ est une vérité logique.
   ii) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ est une vérité logique
   iii) $C \wedge D$ est une conséquence logique de $A \vee (B \wedge C)$, $\neg E$, $(A \vee B) \rightarrow (D \vee E)$ et $\neg A$.

Exercices 5

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

---

1. Donnez une démonstration formelle de
   i. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ à partir d'aucune prémisse
   ii. $C \wedge D$ à partir des prémisses $A \vee (B \wedge C)$, $\neg E$, $(A \vee B) \rightarrow (D \vee E)$ et $\neg A$.

2. Donnez une démonstration formelle des deux équivalences importantes. Après leur démonstrations vous pourrez vous servir d'elles avec profit !
   i. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
   ii. $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

3. Donnez une démonstration formelle de 'Cube(a)↔Petit(a)' à partir de l'ensemble de prémisses :
   i. Cube(a) ∨ Dodec(a) ∨ Tet(a)
   ii. Petit(a) ∨ Moyen(a) ∨ Grand(a)
   iii. Moyen(a) ↔ Dodec(a)
   iv. Tet(a) ↔ Grand(a)

   (Indication : Vous aurez besoin d'un concept plus général de contradiction !)

4. Donnez une analyse logique de la démonstration prétendue suivante. Nommez explicitement chaque étape de démonstration valide et chaque méthode de démonstration appliquée. S'il y a des étapes non valides, alors identifiez-les et expliquez pourquoi elles ne sont pas valides. S'il y a une erreur, est-il possible de la corriger et de donner une démonstration correcte de la conclusion à partir des prémisses ? Les prémisses sont :
   i. ∀x ((Brillig(x) ∨ Tove(x)) → (Mimsy(x) ∨ Gyre(x)))
   ii. ∀y ((Slithy(y) ∨ Mimsy(y)) → Tove(y))
   iii. ∃x Slithy(x)

   La conclusion prétendue est ∃x (Slithy(x) ∧ Mimsy(x)).

   Voilà la démonstration prétendue :

   > En vertu de la 3[e] prémisse, nous savons qu'il existe quelque chose dans l'univers du discours qui est 'slithy'. Soit b un de ces objets 'slithy'. En vertu de la 2[e] prémisse, nous savons que b est 'tove'. En vertu de la première prémisse, nous voyons que b est 'mimsy'. C'est pourquoi b est autant 'slithy' que 'mimsy'. Par conséquent, il existe quelque chose de 'slithy' et 'mimsy'.

5. Donnez une analyse logique de la démonstration prétendue suivante. Nommez explicitement chaque étape de démonstration valide et chaque méthode de démonstration appliquée. S'il y a des étapes non valides, alors identifiez-les et expliquez pourquoi elles ne sont pas valides. S'il y a une erreur, est-il possible de la

corriger et de donner une démonstration correcte de la conclusion à partir des prémisses ? Les prémisses sont :

i. $\forall x\ ((\text{Brillig}(x) \wedge \text{Tove}(x)) \rightarrow \text{Mimsy}(y))$

ii. $\forall y\ ((\text{Tove}(y) \vee \text{Mimsy}(y)) \rightarrow \text{Slithy}(y))$

iii. $\exists x\ \text{Brillig}(x) \wedge \exists x\ \text{Tove}(x)$

La conclusion prétendue est $\exists z\ \text{Slithy}(z)$.

Voilà la démonstration prétendue :

> En vertu de la 3e prémisse, nous savons qu'il existe des 'toves brilligues'. Soit b un tel individu. En vertu de la 1e prémisse, nous savons que b est 'mimsy'. En vertu de la 2e prémisse, nous savons que b est 'slithy'. Donc, il existe quelque chose qui est 'slithy'.

6. Soient données les prémisses suivantes :

   i. $\forall y\ (\text{Cube}(y) \vee \text{Dodec}(y))$

   ii. $\forall x\ (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Grand}(x))$

   iii. $\exists x\ \neg \text{Grand}(x)$

   Est-ce que la proposition '$\exists x\ \text{Dodec}(x)$' suit logiquement de cela ?

   Si oui, donnez la démonstration ; si non, construisez un monde de Tarski dans lequel les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse.

Exercices 6

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

1. Donnez le pendant formel de l'argument (corrigé) de l'exercice 4 de la série 5, mais en remplaçant la première prémisse de cet exercice par la proposition suivante :
   $\forall x\ ((\text{Brillig}(x) \vee \text{Tove}(x)) \rightarrow (\text{Mimsy}(x) \wedge \text{Gyre}(x)))$

2. Donnez une démonstration formelle de '$\exists x\ \text{Dodec}(x)$' à partir des prémisses suivantes :
   i) $\forall y\ (\text{Cube}(y) \vee \text{Dodec}(y))$
   ii) $\forall x\ (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Grand}(x))$
   iii) $\exists x\ \neg\text{Grand}(x)$

3. Quelques-unes des inférences suivantes sont valides, les autres ne le sont pas. Donnez une démonstration formelle des inférences valides, et construisez un monde de Tarski dans lequel les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse, si l'inférence n'est pas valide.
   i) $\exists x\ \text{Cube}(x) \wedge \exists x\ \text{Petit}(x)$ suit de la prémisse $\exists x\ (\text{Cube}(x) \wedge \text{Petit}(x))$
   ii) $\exists x\ (\text{Cube}(x) \wedge \text{Petit}(x))$ suit de la prémisse $\exists x\ \text{Cube}(x) \wedge \exists x\ \text{Petit}(x)$
   iii) $\exists x\ (\text{Cube}(x) \wedge \text{Petit}(d))$ suit de la prémisse $\exists x\ \text{Cube}(x) \wedge \text{Petit}(d)$

4. Démontrez formellement :
   $\forall x\ P(x)$ suit logiquement de la prémisse $\forall y\ P(y)$

5. Démontrez formellement :
   $\neg\exists x\ P(x)$ suit logiquement de la prémisse $\forall x\ \neg P(x)$

Exercices 7 (Récapitulation)

Introduction à la logique formelle II
SE 2006

1. Démontrez informellement la conclusion 'Cube(f)' à partir des quatre prémisses :
   i. MêmeRang(b,f) ∨ MêmeRang(c,f) ∨ MêmeRang(d,f)
   ii. ¬MêmeRang(c,f)
   iii. Devant(b,f)
   iv. ¬(MêmeRang(d,f) ∧ Cube(f))

2. Démontrez formellement (sans théorème antécédents) :
   i. | P ↔ ¬P
      |---
      | ⊥

   ii. |---
       | (P→Q) ↔ (¬P∨Q)

3. Décidez si l'argument est valide. S'il ne l'est pas, construisez un monde de Tarski qui le prouve (un contre-exemple) ; s'il l'est, prouvez-le formellement (évt. avec des théorèmes antécédents)

   | Petit(a) ∧ (Moyen(b) ∨ Grand(c))
   | Moyen(b) → Devant(a,b)
   | Grand(c) → Tet(c)
   |---
   | ¬Tet(c) → Devant(a,b)

4. Prouvez informellement l'argument suivant :

   | b est petit, alors il y a un cube dans ce cas.
   | Si c est petit, alors d ou e l'est aussi.
   | Si d est petit, alors c ne l'est pas.
   | Si b est un cube, alors e n'est pas petit.
   |---
   | Si c est petit, alors b l'est aussi.

5. Prouvez formellement (sans théorème antécédent)

   | ∀x Cube(x) → ∃y Petit(y)
   | ¬∃y Petit(y)
   |---
   | ∃x ¬Cube(x)

6. Dans l'argument suivant, la première prémisse est ambiguë. Traduisez deux fois l'argument en LLPO en explicitant cette ambiguïté de la première prémisse. Avec l'une des traductions, la conclusion suit logiquement des prémisse ; avec l'autre non. Démontrez l'argument valide formellement et décrivez une situation dans laquelle les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse pour l'argument faux.

   | Tout ce qui brille n'est pas de l'or
   | Cette bague brille
   |---
   | Donc, cette bague n'est pas (en) or.

7. Prouvez informellement l'argument suivant :

   $\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Grand}(x)) \vee (\mathrm{Tet}(x) \wedge \mathrm{Petit}(x))$
   $\forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{Derrière}(x,c))$
   ___
   $\forall x\ (\mathrm{Petit}(x) \rightarrow \mathrm{Derrière}(x,c))$

8. Traduisez l'argument suivant en LLPO et décidez si la conclusion suit logiquement des prémisses. Si c'est le cas, prouvez-le formellement (vous pouvez employer des théorèmes).

   Chaque enfant est droitier ou intelligent.
   Aucun enfant intelligent ne mange du foie.
   Il y a un enfant qui mange du fois et des oignons.
   ___
   Il y a donc un enfant droitier qui mange des oignons.

9. Observez un LLPO avec un seul prédicat P à deux places et une structure du premier ordre M avec l'état de choses $G=\{1,2,3\}$. L'extension de P est l'ensemble des paires ordonnées (n,m) pour lesquelles $m=n+1$.
   Décrivez d'abord pour les ebf suivants quelles variables attributives conviennent. Ensuite, décrivez quelles variables attributives complètent.
   i. $P(y,z)$
   ii. $\forall z\ P(y,z)$
   iii. $\exists x(P(x,x) \vee (P(y,z))$

10. Démontrez la validité de la règle de l'élimination du quantificateur universel ($\forall$Elim).